

JÚLIO KIYOSHI HASEGAWA

# Fototriangulação em Linha com Depuração de Erros Grosseiros

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA  
1990

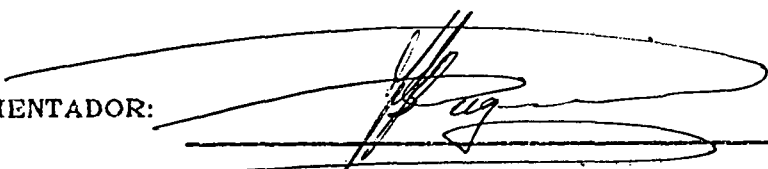
FOTOTRIANGULAÇÃO EM LINHA COM DEPURAÇÃO  
DOS ERROS GROSSEIROS

por

JÚLIO KIYOSHI HASEGAWA

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciências  
Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, para obtenção do  
grau de Mestre em Ciências.

ORIENTADOR:



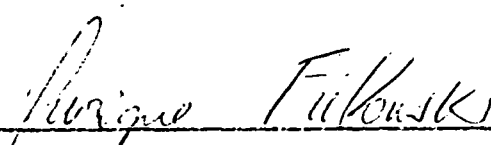
---

Prof. Dr. JOÃO BOSCO LUGNANI



---

Prof. EDSON APARECIDO MITISHITA



---

Prof. HENRIQUE FIRKOWSKI

Curitiba, 29 de abril de 1991

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece sinceramente

-o professor Dr. João Bosco Lugnani pela paciência, orientação, incentivo, apoio e amizade;

-o professor Dr. João Fernando Custódio da Silva pela co-orientação e incentivo;

-o professor João Francisco Galera Monico, pelo apoio, incentivo, sugestões, discussões e pela amizade que muito contribuíram para este trabalho;

-o professor Antonio Maria Garcia Tommaselli, pelo apoio, incentivo e sugestões que muito contribuíram para este trabalho;

- ao departamento de Cartografia da FCT/UNESP, Presidente Prudente - SP, pela concessão do afastamento integral necessário a obtenção dos créditos e

-a CAPES pelo apoio financeiro.

## DEDICATÓRIA

Dedico

A minha querida esposa;

Aos meus filhos Aline, Juliana e Júlio.

## SUMÁRIO

	Página
Folha de rosto .....	1
Termo de aprovação .....	11
Agradecimentos .....	iii
Dedicatória .....	iv
Sumário .....	v
Lista de tabelas .....	1x
Lista de figuras .....	xi
Resumo .....	xiv
<b>1. Introdução</b>	
1.1. Desenvolvimento da fototriangulação "on-line" ....	001
1.2. Definição do problema .....	004
1.3. Objetivos .....	006
1.4. Tópicos do trabalho .....	007
<b>2. Erros grosseiros</b>	
2.1. Introdução .....	009
2.2. Classificação dos E.G. ....	010
2.3. Identificação e eliminação dos E.G. ....	012
2.4. Depuração dos E.G. com "Danish Method" .....	016
2.5. Depuração dos E.G. com "Data Snooping" .....	019
2.5.1. "Data Snooping" modificado .....	021
2.5.2. "Data Snooping" com observações ponderadas	023

3. Depuração de erros grosseiros nas observações	
3.1. Introdução .....	025
3.2. Tripletos .....	027
3.2.1. Correção e controle dos erros sistemáticos	028
3.2.2. Cálculo dos parâmetros aproximados .....	029
3.2.3. Aplicação da equação de colinearidade .....	031
3.3. Depuração dos E.G. ....	037
3.3.1. Depuração dos E.G. do tipo A nas marcas fiduciais .....	037
3.3.2. Depuração dos E.G. do tipo A nas observações .....	037
3.3.3. Depuração dos E.G. do tipo C nas marcas fiduciais .....	039
3.3.4. Depuração dos E.G. do tipo C nas observações .....	042
3.3.5. Depuração dos E.G. do tipo D nas observações .....	042
4. Depuração de erros grosseiros nos pontos de enlace e controle	
4.1. Introdução .....	045
4.2. Concatenação das faixas .....	047
4.2.1. Concatenação das faixas com transformação isogonal .....	048
4.2.2. Concatenação das faixas com transformação afim .....	049
4.2.3. Concatenação das faixas com polinômio .....	050
4.3. Cálculo das coordenadas no espaço objeto .....	051
4.4. Depuração dos E.G. nos pontos de enlace .....	053

4.5. Depuração dos E.G. do tipo B .....	054
4.6. Depuração dos E.G. do tipo C e D .....	058
4.7. Fototriangulação simultânea por feixes perspectivos (bundle) .....	060
4.7.1. Considerações gerais da fototriangulação simultânea por feixes .....	060
4.7.2. Tratamento matemático .....	061
4.7.3. Problema na montagem das matrizes "A" e "N" .....	062
4.7.4. Injunções e resolução de sistemas .....	063
 <b>5. Testes</b>	
5.1. Introdução .....	064
5.2. Depuração dos E.G. ....	064
5.2.1. Depuração dos E.G. nas marcas fiduciais (teste 01) .....	070
5.2.2. Depuração dos E.G. do tipo A e C nas fotocoordenadas (teste 02) .....	073
5.2.3. Depuração de E.G. do tipo D (teste 03) ....	075
5.2.4. Depuração de E.G. do tipo D em mais de uma observação (teste 04) .....	082
5.2.5. Depuração dos E.G. nos pontos de enlace (teste 05) .....	084
5.2.6. Depuração dos E.G. do tipo B, C e D nos pontos de controle (teste 06 e 07) .....	088
5.3. Fototriangulação simultânea com análise dos resultados .....	096
 <b>6. Conclusões e recomendações</b>	
6.1. Conclusões .....	098





## LISTA DE TABELAS

- 4.01 - Transformações utilizadas nos programas de concatenação das faixas e transformação de sistemas ..... 052
- 5.01 - Tempo de execução para a formação do tripleto isento de erros grosseiros contendo na 1<sup>a</sup> coluna a configuração, na 2<sup>a</sup> o tempo de execução e na 3<sup>a</sup> o  $\hat{\sigma}^2$  (variância de peso unitário à posteriori ..... 070
- 5.02 - Coordenadas observadas das marcas fiduciais (3 séries) e com o erro médio quadrático dos desvios. Um erro de 0,025 mm na coordenada X do ponto 03 foi introduzido ..... 071
- 5.03 - Coordenadas das marcas fiduciais calibradas, observadas transformadas e os resíduos, com um erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada "x" observada do ponto 2 ..... 072
- 5.04 - Valores em módulo dos resíduos padronizados dos pontos da configuração dada pela figura 3.7, com erro de 0,10 mm na coordenada Y do ponto 06 ..... 074

- 5.05 - Resíduos e pesos do pontos das coordenadas "y" (com erro de 0,020 mm no ponto 11), obtidas pelo ajustamento com Estimativa Robusta e com "K" ponderado, aplicada a configuração dada na figura 5.2 ..... 079
- 5.06 - Resíduos e pesos das coordenadas "X" dos pontos, obtidos da aplicação da Estimativa Robusta onde um erro de 0,020 mm foi introduzido na coordenada Y da foto (i+1) no ponto 03, aplicada na configuração dada na figura 5.3 ..... 080
- 5.07 - Valor do resíduo padronizado, obtidas após o ajustamento com "Data Snooping" modificado, com erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada Y do ponto 11 na fot i, na distribuição dada pela figura 5.2 . 081
- 5.08 - Valor do resíduo padronizado, obtidas após o ajustamento com "Data Snooping" modificado, com erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada X do ponto 03 da foto (i+1), na distribuição dada pela figura 5.2. .... 082
- 5.09 - Resíduos e pesos das coordenadas Y, obtidas após o ajustamento com Estimativa Robusta, na configuração dada pela figura 5.2, com erro grosseiro de 0,020 mm nas coordenadas dos pontos 01 e 21 da foto i ... 083

- 5.10 - Resíduos dos pontos de ligação entre as faixas 1 e 2 da distribuição dada pela figura 5.7, com erro grosseiro na coordena X do ponto 15 de 0,025 mm .. 097
- 5.11 - Resíduos das coordenadas dos pontos, com erro grosseiro de 1,00 m na coordenada X de terreno do ponto 49 ..... 093
- 5.12 - Relação dos resíduos dos pontos onde um erro grosseiro de 0,50 m na coordenada Y do ponto 49 foi introduzido ..... 095
- 5.13 - Tempo de execução,  $\hat{\sigma}_0$ , número de iterações e a máxima discrepância geradas pelo programa FTCHO ... 097

## LISTA DE FIGURAS

2.1 - Posição dos pontos na formação de dois modelos a partir de três fotos .....	014
3.1 - Feixes de raios que definem um ponto de ligação ....	027
3.2 - Sistemas de coordenadas envolvidas no triplete .....	030
3.3 - Posição dos pontos em relação ao sistema de coordenadas utilizado .....	031
3.4 - Posição dos pontos de ligação nas fotos do triplete	038
4.1 - Posição dos pontos de ligação entre as faixas .....	053
5.1 - Posição dos 25 pontos no triplete, representada na foto central .....	067
5.2 - Ilustração da posição dos 15 pontos no triplete posicionada em 5 colunas, representada na foto central .....	067
5.3 - Posição dos 15 pontos no triplete posicionados em 3 colunas, representada na foto central .....	068

5.4 - Posição dos 15 pontos no triplete com dupla observação nas bordas, representada na foto central .....	068
5.5 - Posição de 09 pontos no triplete, representada na foto central .....	069
5.6 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixas com pontos de ligação alinhados .....	085
5.7 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixas com pontos de enlace não alinhados .....	088
5.8 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixas com pontos de controle plani-altimétricos nos cantos e altimétricos espaçados de no máximo duas bases .....	089
5.10- Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixas com pontos de controle plani-altimétricos nos extremos e no meio das faixas .....	090
5.11- Bloco de uma faixa de 30 fotos com pontos de controle distribuídos a cada 05 bases .....	090

## Resumo

Neste trabalho investigou, desenvolveu e implementou uma metodologia de depuração de erros grosseiros numa fototriangulação analítica.

Os dispositivos matemáticos utilizados na depuração de erros grosseiros foram o "Data Snooping" e "Danish Method". O primeiro foi aplicado nas observações e o segundo nas observações e pontos de controle.

O procedimento adotado na depuração dos erros grosseiros foi a filtragem progressiva, isto é, os erros são depurados sequencialmente, do de maior ao de menor magnitude.

Todo o sistema, programas computacionais, foi desenvolvido e implementado num ambiente de micro computador do tipo PC.

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Desenvolvimento da Fototriangulação "On - Line".

O uso de técnicas fotogramétricas para determinar posições terrestres (densificações de redes geodésicas, levantamentos cadastrais, levantamentos de engenharia, etc.), tem sido submetido a profundas discussões durante os últimos 20 anos ou mais.

Nesse período a fototriangulação analítica passou por um grande avanço tecnológico e conceitual. Com isto novas preocupações surgiram, tais como: correções aos erros sistemáticos, detecção de erros grosseiros e outras preocupações, sempre na busca de resultados mais precisos.

As coordenadas fototrianguladas analiticamente foram se tornando mais precisas, precisão esta que depende da eficiência do modelo matemático adotado e da qualidade das observações. Em função disto, do equipamento utilizado, do método e de vários outros fatores surgiram várias classificações na fototriangulação.

Dentre as várias classificações da fototriangulação, neste trabalho são de interesse as classificações quanto ao método de ajustamento e ao modo de processamento.

O método de ajustamento pode ser dividido em sequencial e simultâneo. No primeiro, o processamento é efetuado logo após a observação do último ponto, aplicando-se assim o modelo de ajustamento sequencial. É o procedimento recomendado quando se utiliza computadores de pequeno porte. A fototriangulação simultânea, quando se efetua o ajustamento simultâneo, necessita de computadores com grande capacidade de

processamento e armazenamento.

Quanto ao modo de processamento pode ser: "off-line" (fora de linha), onde as observações e o processamento são tratados em duas etapas distintas; "on-line" ou em linha, onde as observações são processadas quase que em tempo real, à medida que são efetuadas.

Geralmente a fototriangulação sequencial é associada ao modo "on-line", pois, como já foi comentado o processamento das observações em tempo real leva a processar os parâmetros, caracterizando assim uma fototriangulação "on-line". Da mesma forma a fototriangulação simultânea é associada ao modo de processamento "off-line".

Segundo (GRUEN, [14]), a qualidade e eficiência de um sistema "on-line" são baseadas no tempo de computação requerido, facilidades computacionais, métodos de análise dos resultados, confiabilidade dos resultados e do grau e conforto da interatividade.

As facilidades computacionais, confiabilidade dos resultados e grau e conforto da interatividade dependem do equipamento disponível e do programa desenvolvido. Os métodos de análise dos resultados dependem também do programa desenvolvido, isto é, da capacidade do programa em depurar da melhor forma possível os erros grosseiros e sistemáticos.

A fototriangulação "on-line" está intimamente relacionada com os restituidores analíticos ("analytical plotter")<sup>1</sup>, pois todo o sistema deve dar uma resposta quase que

1

Apresentado por U. V. Helava na década de 50, considerado o idealizador do restituidor analítico.



imediatamente quando um comando é acionado. Os restituidores analíticos oferecem a possibilidade de processar as observações em "tempo real" e posicionar as marcas de medições automaticamente.

A partir da década de 50, a fototriangulação "on - line" começou a ser desenvolvida aproveitando-se do desenvolvimento dos computadores. Consequentemente vários trabalhos foram publicados.

Entre 1963 e 1974, Jaksic enfatiza a possibilidade de formar faixas analiticamente, citando a transformação imediata do sistema da faixa para o sistema de controle terrestre e menciona também a capacidade do procedimento de repetir as observações das fotocoordenadas, (GRUEN, [14]).

A partir de 1976, com a criação de um grupo de trabalho pela Sociedade Internacional de Fotogrametria e Sensoriamento Remoto (ISPRS), a fototriangulação "on-line" tomou um grande impulso e a partir de então um grande número de trabalhos foram publicados.

Mikhail & Ackerman [28] usam o método em que se modifica a inversa do sistema das equações normais, a fim de adicionar ou deletar dados observados e/ou parâmetros do modelo.

O filtro de Kalman foi originalmente desenvolvido e aplicado ao problema de estimativa sequencial, onde um vetor de dimensão constante vai sendo atualizado. Capacidade esta que poderia ser aproveitada na inserção ou deleção de observações. A maior desvantagem desse método se deve à impossibilidade de explorar o padrão esparsa da matriz das equações normais (GRUEN, [13]).

A técnica Fator de Atualização Triangular aplica-se na estimativa sequencial em fototriangulação "on-line", explorando o padrão esparsa da matriz das equações normais, evitando a desvantagem do filtro de Kalman (GRUEN [13]).

Pode-se também utilizar os métodos de solução dos sistemas de equações normais, tais como: Gauss-Seidel, Cholesky, Gradientes Conjugados e outros, os quais tornam o procedimento da solução dos sistemas de equações normais mais rápidos, se comparado ao procedimento da solução pela inversa ( $X = N^{-1}U$ ). Entretanto, a grande desvantagem do procedimento destes métodos alternativos de solução de sistemas de equações normais é a inviabilidade de se determinar a inversa da matriz  $N$ , impossibilitando a estimativa da precisão dos parâmetros, problema este que pode ser contornado utilizando-se de pontos de verificação ou por algum procedimento matemático.

A grande vantagem da fototriangulação "on-line" é quando o procedimento da filtragem progressiva dos erros grosseiros é efetuada. Pode se utilizar a sequência recomendada por (SILVA, [34]) para a filtragem progressiva dos erros grosseiros.

## 1.2. Definição do problema

Um dos problemas da fototriangulação é a presença de erros grosseiros que deterioram os resultados, podendo até fornecer resíduos aceitáveis à primeira vista, mas os parâmetros estimados e suas variâncias não corresponderão à realidade, ou seja, a precisão interna não representará a externa.

A análise dos resíduos para a detecção e localização

dos erros grosseiros é difícil, pois os resíduos são considerados variáveis aleatórias distribuídas normalmente, isto é,  $E(v) = 0$ . Na fototriangulação a situação se torna mais crítica devido ao número de observações envolvidas ser muito grande e a distribuição normal dos resíduos aplica-se não somente ao conjunto, mas também às fotos e pontos individualmente. Em outras palavras, a soma dos resíduos em uma foto e a soma dos resíduos de um ponto em todas fotos é nula (EL-HAKIM, [10]).

Existem vários procedimentos para a detecção de erros grosseiros. A filtragem progressiva parece ser atualmente a mais eficiente e a mais apropriada na fototriangulação "on-line". Ela consiste basicamente em detectar erros grosseiros de maior magnitude primeiro com algoritmos mais simples e progressivamente ir detectando os erros gradativamente menores com dispositivos matemáticos mais refinados. Por fim, para detectar erros grosseiros de menor magnitude usam-se técnicas estatísticas tais como: "Data snooping" e Estimativa Robusta.

Segundo Silva [34], a técnica de filtragem progressiva dos erros grosseiros aliada a inferência bayesiana pode aumentar a eficiência na confiabilidade da fototriangulação.

Na fototriangulação simultânea "off-line" o procedimento para a depuração de erros grosseiros torna-se difícil, pois a grande quantidade de dados envolvidos pode mascarar o resultado e, ainda, dependendo do erro, inviabilizar todo o bloco.

A fototriangulação analítica sequencial por

processamento "on-line" leva vantagem sobre o processamento simultâneo "off-line", com respeito à depuração de erros grosseiros. Isto ocorre devido ao tratamento quase que em tempo real e também pela pequena quantidade de observações a ser processada em cada fase do ajustamento.

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é geralmente aplicado na fototriangulação analítica que considera somente a existência de erros aleatórios, requerendo na sua aplicação a inexistência de erros grosseiros e sistemáticos.

Os erros sistemáticos podem ser modelados ou parametrizados matematicamente, com isto, se adapta aproximadamente o modelo funcional à realidade física.

As observações afetadas pelos erros grosseiros devem ser eliminadas. Na fototriangulação analítica de grande bloco, grandes quantidades de observações são efetuadas, que torna o procedimento de depuração de erros grosseiros quase que impraticável, quando ajustada simultaneamente.

### 1.3. Objetivos

Os objetivos principais deste trabalho são:

- a) desenvolver, em microcomputador, um programa de fototriangulação analítica sequencial na linguagem FORTRAN 77;
- b) implementar algoritmos para a depuração de erros grosseiros;
- c) desenvolver um programa de fototriangulação simultânea por feixes perspectivos e
- d) testar, comparar e analisar os resultados e algoritmos implementados.

#### 1.4. Tópicos do trabalho

A depuração de erros grosseiros será apresentada no capítulo 2, onde serão discorridos os tipos de erros grosseiros e os procedimentos adotados para depurá-los.

O procedimento utilizado neste trabalho é a filtragem progressiva dos erros grosseiros, onde dois modelos matemáticos principais serão testados, o "Data Snooping modificado" e a Estimativa Robusta. Estes testes terão por finalidade verificar a simplicidade, facilidade computacional e principalmente a capacidade de detectar mais de um erro grosseiro no ajustamento.

No capítulo 3 a depuração de erros grosseiros nas fotocoordenadas será apresentada teoricamente. O procedimento adotado para auxiliar na depuração dos erros grosseiros será a utilização de três fotos, ajustadas simultaneamente (tripletos), usando o método de Cholesky para resolver o sistema de equações normais. O resultado final é a formação de faixas com coordenadas tridimensionais, isentas de erros grosseiros detectáveis, e coordenadas observadas depuradas dos erros grosseiros e sistemáticos.

Na primeira parte do capítulo 04 será apresentada a concatenação sequencial das faixas, até à formação do bloco, que é transformado para o sistema de coordenadas do terreno, com o auxílio dos pontos de controle. Para estas transformações utiliza-se de vários modelos matemáticos, a fim de se verificar a exatidão deste procedimento.

Na segunda parte do capítulo 04 será apresentada a fototriangulação simultânea por feixes perspectivos, tornando assim os dois procedimentos anteriores como um

pré-processamento, ou seja, refinar as coordenadas observadas e calcular as coordenadas aproximadas para o ajustamento posterior, podendo assim verificar que melhorias traria este pré-processamento (em linha e concatenação das faixas). Ainda nesta etapa é verificada a existência de erros grosseiros nos pontos de ligação das faixas e dos pontos de controle.

No capítulo 5 serão apresentados vários testes dos assuntos abordados nos capítulos 2, 3 e 4. Em função dos resultados obtidos, serão apresentados no capítulo 6 alguns comentários, conclusões e recomendações.

## ERROS GROSSEIROS

### 2.1. Introdução

A acuracidade das coordenadas de pontos no espaço objeto determinados por técnicas fotogramétricas (fototriangulação), depende: do uso do modelo matemático adequado, da correta parametrização dos erros sistemáticos e da capacidade do sistema em detectar erros grosseiros.

O método dos mínimos quadrados (MMQ) é aplicado nos programas de ajustamento de fototriangulação. As premissas básicas para a aplicação do MMQ são a inexistência de erros grosseiros e sistemáticos e a superabundância de observações.

Estando as observações com erros grosseiros, elas apresentam uma indesejável distribuição dos erros sobre todo o conjunto. A análise dos resíduos para a detecção e localização dos erros grosseiros é difícil, pois nem sempre os resíduos servem de indicadores seguros de que a observação a que estão associados deva ser eliminada do ajustamento

Assim, na fototriangulação a questão se torna crítica, pois no MMQ, resíduos são considerados variáveis aleatórias com média zero, isto é, para resíduos não correlacionados e com peso unitário,  $E(v) = 0$  ou  $[v] = 0$ .

Isto não se aplica somente à soma dos resíduos de todas as observações, mas também para os resíduos das observações em cada foto e para os pontos individualmente. Em outras palavras, a soma dos resíduos em uma foto e a soma dos resíduos do mesmo ponto em diferentes fotos é nula [10] pg.

148.

Então, um erro grosseiro num ponto de uma foto não

afeta somente o seu próprio resíduo, mas todos os outros pontos da foto, bem como o resíduo do mesmo ponto em outras fotos, de modo a manter a soma igual a zero.

Além disso, devido à grande redundância (graus de liberdade) a estimativa de  $\hat{\sigma}_0^2$  através de  $V^T P V$  não oferece boas possibilidades de detecção de erros grosseiros em sistemas grandes. Também em caso de fraca geometria pode acontecer que o efeito de um erro grosseiro seja maior em outras observações que na errônea.

Ainda, quando há mais do que um erro grosseiro e com magnitudes diferentes, torna-se quase impossível a localização desses erros pela análise dos resíduos. Mas, a maioria desses erros podem ser detectados e removidos antes do ajustamento simultâneo por feixes de retas (bundle). As técnicas usadas para este propósito dependem do tipo e da magnitude do erro grosseiro.

## 2.2. Classificação dos E.G.

O procedimento utilizado para depuração de erros grosseiros é a filtragem progressiva, procedimento que consiste basicamente em depurar erros grosseiros de maior magnitude primeiro, e sequencialmente ir depurando os erros cada vez menores, até à utilização de conceitos estatísticos para a depuração.

Portanto, a fim de executar esta depuração sequencial, classificam-se esses erros segundo a sua natureza e a sua magnitude em : erros do tipo A, B, C e D (EL-HAKIM, [10]).

Os erros grosseiros do tipo A são de grande



magnitude nas coordenadas imagem ( maiores que  $100\sigma_l^2$  ), podendo ocorrer por exemplo:

- a) troca das coordenadas observadas (x pelo y),
- b) quando o número do ponto é introduzido erroneamente.

Se este erro ocorrer, os resíduos finais, após o ajustamento simultâneo do bloco, serão fortemente afetados, mas os resíduos da foto onde ocorrer os erros, serão maiores. E ainda, na presença deste erro, o ajustamento pode não convergir.

Os erros grosseiros do tipo B são de grande magnitude nas coordenadas dos pontos de controle ( maiores que  $100\sigma_l$  ), causados por exemplo por:

- a) troca de numeração,
- b) inversão dos dígitos,
- c) utilização de sistema de coordenadas incompatível.

Estes erros aparecem com muita frequência, pois os dois primeiros dependem diretamente do fotogrametrista (operador). Quanto maior a quantidade de dados a ser introduzido no arquivo de dados, maior a possibilidade de se cometer erros. O terceiro erro, também de grande importância, a incompatibilidade de sistemas, pode falsear os resultados ou não convergir o ajustamento.

Os erros do tipo C ( maiores que  $30\sigma_l$  e menores que  $100\sigma_l$  ) podem ocorrer nas coordenadas imagem ou nas coordenadas dos pontos de controle, com magnitudes menores que

os erros do tipo A e B. As causas desses erros podem ser as mesmas que as dos erros A e B, mas com efeito menor, como por exemplo, identificação errada do ponto.

Os erros grosseiros do tipo D são ainda menores que os anteriores ( $3 \sigma_1 < EG < 30 \sigma_1$ ) e podem ser confundidos em magnitude aos erros sistemáticos, embora suas características e causas sejam diferentes. São erros causados, principalmente, por problemas de identificação e pela má qualidade das observações. Estes erros podem ocorrer tanto nas observações como nos pontos de controle.

### 2.3. Identificação e Eliminação dos E.G.

Numa fototriangulação analítica os erros grosseiros podem ser depurados em duas etapas distintas, que será dada na sequência mais apropriada para a depuração:

- a ) depuração dos erros grosseiros nas fotocoordenadas,
  - a.1 ) depurar erros grosseiros do tipo A nas fotocoordenadas (observadas nos comparadores), dos pontos e das marcas fiduciais,
  - a.2 ) depurar erros grosseiros do tipo C das fotocoordenadas,
  - a.3 ) depurar erros grosseiros do tipo D das fotocoordenadas, das marcas fiduciais e dos pontos de ligação das faixas;
- b ) depuração dos erros grosseiros nos pontos de controle,
  - b.1 ) depuração dos erros grosseiros do tipo B nos pontos de controle,
  - b.2 ) depuração dos erros grosseiros do tipo C e D nos pontos de controle;
- c ) verificação da precisão da fototriangulação.

O procedimento adotado para detectar e eliminar

erros grosseiros do tipo A, pode ser através de uma transformação geométrica isogonal ou ortogonal<sup>3</sup> no plano, aplicada nas fotografias adjacentes, transformação esta que utiliza dois ou mais pontos em comum. Analisando-se os resíduos, os que tiverem grande discrepância serão facilmente identificados.

Se as observações são executadas estereoscopicamente este procedimento não se faz necessário, mas pode-se controlar os pontos de ligação dos modelos através de uma simples comparação de coordenadas.

Pode-se observar na figura 2.1, as fotocoordenadas dos pontos 4, 5 e 6 (ligação) são observadas quando da formação do primeiro e do segundo modelo (estereocomparador), nesta repetição, os pontos (4, 5 e 6) terão dois conjuntos de coordenadas na foto central (i+1), as quais terão o mesmo valor, no sistema fiducial, se as observações estiverem isentas de erros.

Quando as observações "fotocoordenadas" são transmitidas diretamente do comparador ao micro computador, os erros provenientes da troca de dígitos, bem como os erros em que as coordenadas ultrapassem o valor máximo, que é a metade do quadro focal, deixarão de existir. Assim este problema é solucionado com a automação do sistema.

### 3

A transformação ortogonal é a que melhor resultado traria na depuração de erros grosseiros, mas o modelo matemático não é linear ficando assim a inconveniência do procedimento iterativo.

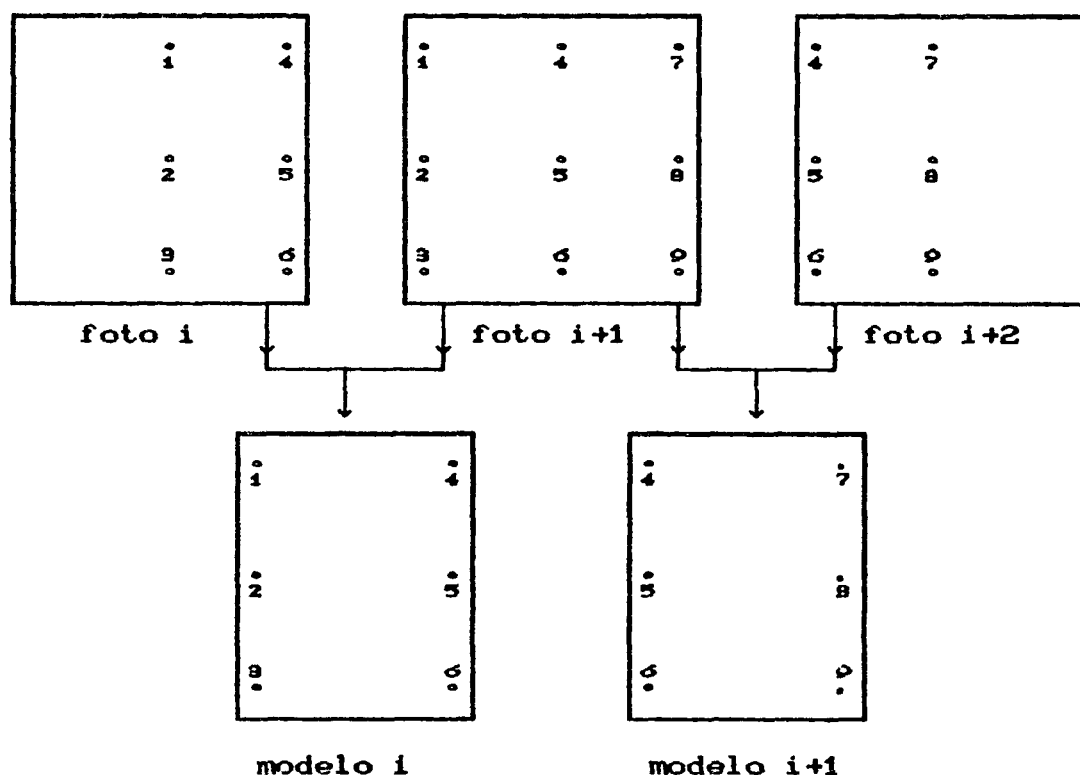


Figura - 2.1 - Posição dos pontos na formação de dois modelos a partir de três fotos.

As marcas fiduciais observadas também podem ser verificadas nesta etapa por comparação das coordenadas no sistema fiducial a um valor limite (valor máximo).

A depuração de erros grosseiros do tipo C nas fotocoordenadas inicia-se depois da eliminação dos erros grosseiros do tipo A. São erros de menor magnitude (entre 30 a 100 desvios padrão), que permitem um ajustamento por feixes (modelos, tripletos, quadrupletos, faixas ou sub-blocos). Depois de completar o ajustamento, os resíduos podem ser analisados para depurar esse tipo de erro.

Quando o procedimento utilizado for a formação da faixa sequencialmente, não haverá a necessidade de se utilizar pontos de controle (no espaço objeto) para as injunções, podendo-se então considerar somente os erros nas

fotocoordenadas, que terão um efeito localizado, ficando assim a análise dos resíduos mais confiável.

Rigorosos testes estatísticos são necessários para detectar erros grosseiros do tipo D nas fotocoordenadas "outlier", que é o erro grosseiro de pequena magnitude não detectado nas etapas anteriores.

Para os testes estatísticos pode-se destacar dois métodos:

- "Data Snooping" ou Método de Baarda (Baarda - 1967)

e

- Estimativa Robusta "Danish Method" - (Krarup, Juhl, Kubik - 1980).

Para a depuração de erros grosseiros do tipo B nos pontos de controle, assume-se que os erros grosseiros dos tipos A, C, D e sistemáticos nas fotocoordenadas foram eliminados. Trata-se nesta fase, de eliminar os pontos com erros grosseiros de grande proporções nas coordenadas dos pontos de controle.

Esta eliminação é feita formando-se faixas, isentas de erros grosseiros nas observações, e posteriormente, concatenando-se as faixas e formando um bloco num sistema único. Faz-se então uma transformação entre os dois sistemas, (bloco e controle), verificando nesta transformação a existência de erros grosseiros.

Geralmente utiliza-se a transformação isogonal no espaço tridimensional com um mínimo de pontos de controle. Obtendo-se os parâmetros da transformação, aplica-se a transformação inversa em todos os pontos de controle. Qualquer erro em um destes pontos será facilmente perceptível.

Se porventura um dos pontos utilizados como controle no ajustamento da transformação estiver afetado por erro grosseiro, então todos os pontos de checagem apresentarão resíduos grandes. Neste caso substituem-se os pontos de controle e repete-se o processo até que o ponto de controle usado no ajustamento afetado seja localizado.

Os erros grosseiros do tipo C e D nos pontos de controle são os que permaneceram após a depuração do tipo B, podem ser depurados utilizando-se de uma transformação isogonal no espaço, alterando-se o peso através do modelo matemático "Danish Method".

#### 2.4. Depuração dos E.G. com "Danish Method"

Nesta etapa de depuração de erros grosseiros do tipo D, pode-se utilizar do "Danish Method" para detectar erros grosseiros de pequena magnitude. No fim do processamento do triplete as observações com os erros grosseiros detectáveis terão pesos próximos de zero, fazendo com que os resíduos destes pontos absorvam todo o erro. Ainda, no fim do ajustamento, pode-se verificar se o erro cometido foi no modelo atual ou no anterior. Se possível, executa-se a correção.

A estimativa robusta ("Danish Method") é uma função matemática que junto com o MMQ pode detectar erros grosseiros, baseando-se nos resíduos das observações do ajustamento precedente.

Um estimador robusto pode ser definido como um estimador que permanece invariável sob a variação da função distribuição básica ou na presença de observação com

distribuição contaminada com erros grosseiros, (JORGENSEN et alii. [18]).

Dentre as várias formulações do estimador robusto o "Danish Method" desenvolvido por Krarup (1967), é o que mais se "popularizou" em ajustamento de bloco por feixes.

O princípio básico deste método é repetir o ajustamento pelos mínimos quadrados, com o peso calculado como uma função dos resíduos do ajustamento precedente, até que o resíduo se estabilize. Os pesos das observações com erros grosseiros convergirão a zero (ou para um valor próximo de zero), o que significa que as observações serão excluídas do conjunto de dados.

O algoritmo proposto por Krarup (1967), foi especialmente concebido para eliminar automaticamente os erros grosseiros. Os pesos são calculados através dos resíduos do ajustamento anterior, para cada observação. O modelo matemático é baseado na função peso

$$P = \begin{cases} 1 & , \text{para } |v| \leq 2 \hat{\sigma}_0 \\ \text{proporcional à } e^{-cv^2} & , \text{para } |v| > 2 \hat{\sigma}_0 \end{cases} \quad (2.01)$$

onde:

$\hat{\sigma}_0$  é o desvio padrão das observações e  $c$  é uma constante. Com estes pesos um novo ajustamento é efetuado e este processo é repetido até que o resíduo estabilize.

Várias interpretações foram dadas ao modelo matemático (2.01) entre os quais: solução iterativa através do princípio de estimativa Bayesiana, ou programação linear,

(KRARUP, et alli, [20]).

Para cada caso há uma formulação matemática adaptada à (2.01). No caso da fototriangulação com ajustamento por feixes o modelo que se mostrou mais eficiente, será dado a seguir (KRARUP, [20]).

primeira etapa:  $P = I$

segunda etapa :  $P = e^{-\left(0,05 \left(\frac{v}{\sigma_0}\right)^{4,4}}\right)}$ , nas três primeiras iterações

terceira etapa :  $P = e^{-\left(0,05 \left(\frac{v}{\sigma_0}\right)^{3,0}}\right)}$ , nas demais iterações.

(2.02)

Na primeira etapa executa-se o ajustamento pelo MMQ até a convergência do sistema, pois como já foi explanado, no MMQ o erro grosseiro na observação é distribuído em todas as observações. Como o procedimento utilizado neste trabalho é o da filtragem progressiva, as observações estão somente com erros grosseiros de pequena magnitude.

A partir da segunda etapa a convergência do procedimento será determinada pelo desvio-padrão obtido através dos resíduos e a cada iteração novo peso será calculado. A segunda etapa fornece uma convergência mais brusca que na terceira. No fim do ajustamento os pesos correspondentes às observações com erros grosseiros serão aproximadamente nulos.

O "Danish Method" é muito utilizado e tem apresentado bons resultados, grande eficiência na detecção e localização de erros no ajustamento. Além da facilidade computacional, há as vantagens de aproveitamento do programa de ajustamento pelo MMQ e pouco tempo de execução.

Em contrapartida, os pontos podem ser eliminados



individualmente do ajustamento sem uma análise mais profunda , e há dificuldade na detecção e localização de pequenos erros grosseiros.

## 2.5. Depuração dos E.G. com "Data Snooping"

A fim de comparar a eficiência dos modelos matemáticos na detecção de erros de pequenas magnitudes, desenvolveu-se o programa com "Data Snooping", usando para isto algoritmos desenvolvidos por (GRUEN, [13]), adaptado ao método de Cholesky de resolução de sistemas, calculando assim somente os elementos da diagonal de  $Q_{vv}$ .

A dificuldade deste método, é a definição da constante "c", valor crítico, que será tomado como base para verificar o resíduo padronizado. O valor de "c" é de difícil cálculo, por depender do nível de significância específico. A fim de solucionar este problema existe em (POPE, [31]) uma rotina que calcula este valor em função do número de observações, graus de liberdade.

A técnica "data Snooping" baseia-se em testes estatísticos dos resíduos padronizados depois do ajustamento pelo MMQ. A relação entre o resíduo  $v$  e o erro na observação  $d_l$  é dado por

$$v = - Q_{vv} P_{ll} d_l \quad (2.03)$$

onde:

$Q_{vv}$  é a matriz cofatora dos pesos dos resíduos e

$P_{ll}$  é a matriz peso das observações.

O efeito de um erro grosseiro  $\Delta l_i$  sobre o resíduo  $V_i$  de uma observação  $l_i$  é,

$$\Delta V = - r_i \Delta l \quad (2.04)$$

onde:

$r_i$  é o elemento diagonal da  $i$ -ésima coluna da matriz  $Q_{vv} P_{ll}$ .

O elemento  $r_i$  é chamado de número de redundância, o qual pode assumir valores no intervalo  $[0,1]$  e leva em conta a confiança de uma observação particular no ajustamento. Se a redundância for nula ( $r_i = 0$ ), significa que não há confiabilidade na observação.

O desvio padrão dos resíduos é dado por,

$$\sigma_{v_i} = \sigma_o \sqrt{q_i} \quad (2.05)$$

onde  $q_i$  é o elemento diagonal da matriz  $Q_{vv}$ , e é igual a  $r_i$  se a observação tem como peso a unidade. O resíduo dividido pelo respectivo desvio-padrão, é o resíduo padronizado, que é o valor testado para detectar erros grosseiros. Então o resíduo padronizado  $w_i$  das observações é :

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_o \sqrt{q_i}} \quad (2.06)$$

O resíduo padronizado assume a distribuição normal  $(N(0,1))$ , distribuída sob a hipótese nula  $H_0$ : não há erros grosseiros na observação.  $H_0$  é rejeitada se  $|w_i| > c$ . O valor crítico de  $c$  testado é obtido em função do nível de significância  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é a probabilidade do erro tipo I (falsa rejeição de  $H_0$ ).

Segundo GRUN, [15] o procedimento para detecção de erros grosseiros através do "Data Snooping", utilizando-se do modelo de confiabilidade interna pode apresentar bons resultados, porque leva em consideração, a geometria dos raios que definem o ponto no espaço objeto, a distribuição geral dos pontos e a distribuição (em menor intensidade) dos pontos de controle.

Embora o método seja relativamente simples, a sua aplicação envolve alguns problemas práticos, tais como:

-O teste é unidimensional, ou seja, verifica somente uma observação;

-O esforço computacional para cálculo de  $Q_{vv}$  é muito grande, situação que pode ser contornada em parte, se utilizados modelos alternativos.

Os modelos alternativos conhecidos, derivados do "Data Snooping" são: "Data Snooping" modificado; e "Data Snooping" com observações ponderadas [10], que será discorrido rapidamente.

#### 2.5.1. "Data Snooping" modificado

O "Data Snooping" modificado, calcula somente parte da matriz  $Q_{vv}$ , conforme o seguinte algoritmo.

a) Supor valores aproximados  $\sqrt{q_{vv}^0}$  para  $\sqrt{q_{vv}}$ , sendo obtidos com uma tolerância de  $\pm K_q \%$ .

$$K_q = \frac{(\sqrt{q_{vv}} - \sqrt{q_{vv}^0})}{\sqrt{q_{vv}^0}} \cdot 100$$

b) Calcular todos os resíduos aproximados usando

$$\sqrt{q_{vv}}^0.$$

$$w_i = - \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} , \quad \sigma_{v_i} = \sigma_0 \sqrt{q_{vv}}^0$$

c) Rejeitar todas as observações que pertençam a:

$$|v_i| > c(1 + Kq/100) \sigma_{v_i}^0$$

ou

$$|w_i^0| > c(1 + Kq/100)$$

onde "c" é o valor crítico de rejeição.

d) Aceitar todas as observações que pertençam a:

$$|v_i| < c(1 - Kq/100) \sigma_{v_i}^0$$

ou

$$|w_i| < c(1 - Kq/100)$$

e) Calcular os valores exatos de  $q_{vv}$  somente para as observações que pertençam ao intervalo:

$$c(1 - Kq/100) \sigma_{v_i}^0 \leq |v_i| \leq c(1 + Kq/100) \sigma_{v_i}^0$$

ou

$$c(1 - Kq/100) \leq |w_i| \leq c(1 + Kq/100)$$

Portanto, o dispêndio computacional será reduzido, pois necessita-se calcular somente alguns valores de  $q_{vv}$ , pertencentes ao intervalo crítico. Para o cálculo de  $q_{vv}$ , há a necessidade da matriz "A", que nem sempre é armazenada nos programas de fototriangulação, pois não é necessária na

montagem cumulativa da matriz "N". Em GRUEN, [13] é apresentado um algoritmo alternativo que calcula o elemento  $q_{vv}$  sem utilizar a matriz "A". Existem valores empíricos de  $\sqrt{q_{vv}}$  para as várias possibilidades que podem ocorrer num bloco fototriangulado, em função dos raios que definem o ponto.

### 2.5.2. "Data Snooping" com observações ponderadas

O "Data Snooping" com observações ponderadas, utiliza-se dos pesos escolhidos adequadamente. O peso escolhido representará a qualidade das observações e a geometria dos raios que interceptam no ponto. Pode-se citar dois tipos de função peso, que serão dadas a seguir.

a) Função peso utilizando o resíduo padronizado

$$P = 1/w^2 \quad \text{para } w > c$$

$$P = 1,0 \quad \text{para } w < c$$

onde:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad \text{ou} \quad w_i = \frac{v_i}{\sigma_o \sqrt{q_{vv}}}$$

e c é o valor crítico.

b) Função peso utilizando a variância estimada da observação

$$P = 1/\hat{\sigma}_i^2 \quad \hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}_o^2 - \hat{\sigma}_o^2 \sigma_v^2$$

onde:

$\hat{\sigma}_i^2$  é a variância da observação "a priori",

$\sigma_0$  é o desvio padrão da observação de peso unitário "a posteriori" e

$\sigma_v^2$  é a variância dos resíduos (obtida a partir de  $q_{vv}$ ).

Nestes dois casos não há muita economia computacional, pois precisa-se de calcular a  $q_{vv}$ , mas pode-se otimizar estes procedimentos, combinando com o procedimento adotado no "Data Snooping" modificado.

## DEPURAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS NAS OBSERVAÇÕES

### 3.1. Introdução

Os erros grosseiros nas fotocoordenadas podem ser depurados separadamente aos dos pontos de controle, para isto pode ser utilizado o procedimento de fototriangulação "on-line" (em linha).

Este procedimento tornou-se viável devido as recentes expansões dos sistemas fotogramétricos "on - line", assessorados por uma grande variedade de novos periféricos e de pacotes de programas aplicativos. Estes "Hardwares" e "Softwares" computacionais fornecem grandes vantagens , permitindo assim explorar a capacidade e a precisão dos instrumentos nas tarefas de fototriangulação.

Um restituidor analítico ("Analytical Plotter") ou um comparador assistido por um computador, viabiliza a alta precisão e flexibilidade de uma fototriangulação analítica.

Assim uma fototriangulação sequencial pode ser executada com restituidores analíticos e comparadores devido a grande precisão nas observações. Para o processamento das observações a foto é a unidade para se formar modelos, tripletos, quadrupletos ou sub-blocos, onde os parâmetros podem ser determinados utilizando-se da equação de colinearidade e do MMQ para o ajustamento. O procedimento seria semelhante ao da aeropoligonação, utilizado nos instrumentos analógicos, fornecendo coordenadas (X,Y,Z) dos pontos com precisão necessária para ser utilizado como pontos de orientação dos modelos.

Pode-se então considerar a fototriangulação

analítica em linha, como um procedimento sequencial de fototriangulação, onde há um controle nas observações em tempo quase real e a possibilidade em detectar erros grosseiros passo a passo.

A fototriangulação analítica em linha também pode ser considerada como um procedimento de obter coordenadas finais ou aproximadas:

- a) coordenadas aproximadas, quando estes parâmetros (coordenadas e elementos de orientação), são utilizados como valores iniciais ao ajustamento simultâneo do bloco por feixes,
- b) coordenadas finais, quando estas estão dentro dos padrões estabelecidos, ou seja, quando os desvios-padrão estão dentro do valor determinado para se obter a carta dentro das especificações considerando o padrão de exatidão cartográfica adotado.

A fototriangulação analítica em linha pode ser vista como um procedimento "amigável" em que o operador trabalha interativamente com o "programa", tornando assim a tarefa de medir os pontos menos cansativa e até mesmo evitando que o operador, pelo procedimento repetitivo e pela necessidade da visão estereoscópica, cometa erros grosseiros, principalmente para grandes blocos.

Portanto, optou-se por desenvolver um programa em linguagem Fortran de fototriangulação analítica em linha (sequencial) para depurar os erros grosseiros (A, C e D), que será comentado a seguir, iniciando-se pelo programa elaborado (tripletos).



### 3.2. Tripletos

Verificando a qualidade da fototriangulação em linha e a disponibilidade dos equipamentos existentes no laboratório de fotogrametria da FCT (UNESP- P.Prudente), optou-se por desenvolver este programa de fototriangulação analítica sequencial em linha, montando-se faixas, tendo como base os tripletos.

Um triplete é constituído por dois modelos, ou seja, de três fotos, onde o modelo matemático adotado para determinar os parâmetros é a equação de colinearidade e o MMQ para ajustar as três fotos e os pontos observados.

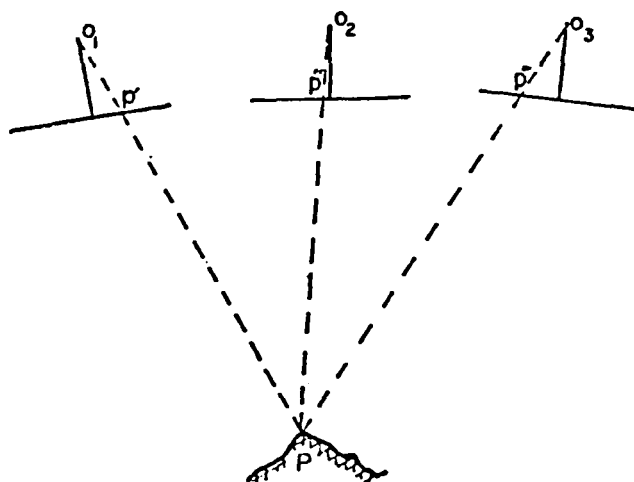


Figura 3.1 - Feixes de raios que definem um ponto de ligação

As vantagens da utilização do triplete, em relação ao modelo (par estereoscópico), estão na confiabilidade dos resultados, pois o grau de liberdade é sempre maior em relação ao modelo. Pode-se verificar, conforme a figura 3.1, que para os pontos de ligação há intersecção de três raios, dando uma melhor definição e a possibilidade de detecção de erros grosseiros nas coordenadas  $x$ .

Para poder explanar melhor sobre o programa desenvolvido, dividiram-se as etapas do programa computacional em sub-itens deste capítulo. Também para se ter uma visão global do programa, elaborou-se um fluxograma, que se encontra no apêndice B.

### 3.2.1. Correção e Controle dos Erros Sistemáticos

Estando as marcas fiduciais sem erros grosseiros, ou com erros de pequena magnitude que possam ser absorvidos como erros aleatórios, executam-se as correções dos erros sistemáticos nas coordenadas observadas, onde a primeira correção é executada pela transformação geométrica (correção da deformação do filme). Neste caso, a transformação utilizada é a afim (seis parâmetros), pois em câmaras providas de apenas quatro marcas fiduciais, a transformação afim foi a que apresentou melhores resultados, segundo KILPELÄ et Alli, [02].

Obtendo-se os parâmetros de transformação, aplica-se esta (transformação inversa) para todos os pontos da foto em questão, após esta operação pode-se verificar a existência de erros grosseiros nos pontos de ligação entre os modelos, que será comentado na seção 3.3.2.

Agora pode-se verificar os erros grosseiros que possam ultrapassar a metade do quadro focal por comparação das fotocoordenadas no sistema fiducial com um valor definido.

Todos os outros erros sistemáticos (coordenadas do ponto principal, distorção radial, distorção descentrada e a refração fotogramétrica), podem ser corrigidos pelas fórmulas dadas em [02], [24], [29], [33].

### 3.2.2. Cálculo dos Parâmetros Aproximados

Os parâmetros aproximados são necessários como um valor de partida para um procedimento iterativo, cuja convergência é assegurada desde que estes valores sejam coerentes.

Os valores aproximados para os elementos de orientação exterior ( $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\kappa$ ,  $X^c$ ,  $Y^c$ ,  $Z^c$ ), são calculados da seguinte forma:

a) para os elementos de translação ( $X^c$ ,  $Y^c$ ,  $Z^c$ )

$$X_1^c = 0. \quad (3.1)$$

$$X_{i+1}^c = X_i^c + B \quad , \text{para } i = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$Y_i^c = 0.$$

$$Z_i^c = c_k \quad , \text{para } i=1, 2, 3 \quad (3.3)$$

$$B = Q_f(100 - S_l)/100 \quad (3.4)$$

onde:

B é a foto-base,

$Q_f$  é o tamanho do quadro focal,

$S_l$  é a superposição longitudinal em porcentagem e

$c_k$  é a distância focal calibrada.

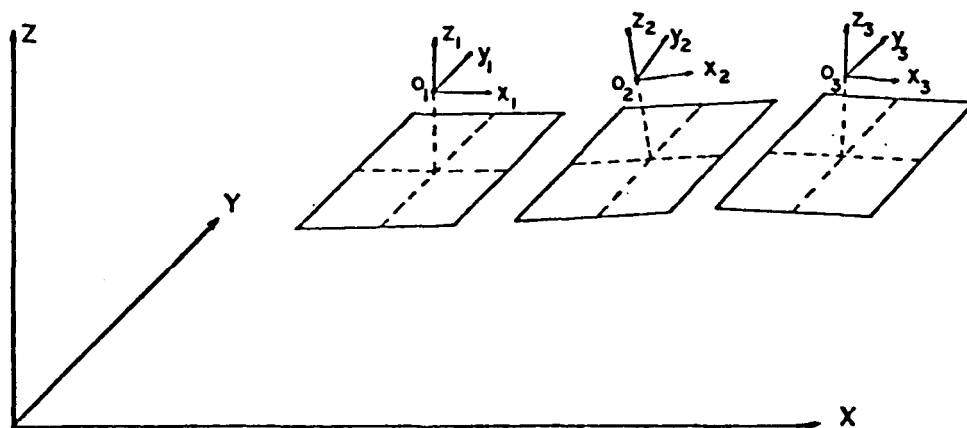


Figura - 3.2 - Sistemas de coordenadas envolvidos no triplete.

b) Os elementos de rotação são dados por:

-para o primeiro triplete

$$\omega_{j,1} = \phi_{j,1} = \kappa_{j,1} = 0 \quad , \text{para } j=1,2,3 \quad (3.5)$$

onde:

j indica a posição da fotografia no triplete,

-para os demais triplets

$$\omega_{j,i} = \omega_{j,i-1} \quad (3.6)$$

$$\phi_{j,i} = \phi_{j,i-1} \quad , \text{para } j = 1,2 \quad (3.7)$$

$$\kappa_{j,i} = \kappa_{j,i-1} \quad i=2,3,\dots,N \quad (3.8)$$

onde:

i indica o número do triplete,

- para a terceira foto do triplete,

$$\omega_{3,i} = \phi_{3,i} = \kappa_{3,i} = 0.$$

As coordenadas aproximadas para os pontos são calculadas da seguinte forma:

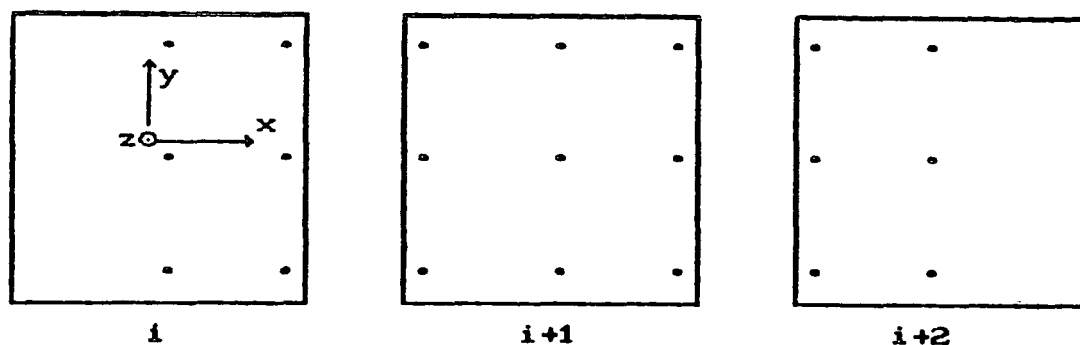


Figura 3.3 - posição dos pontos em relação ao sistema de coordenadas

a) para os pontos que aparecem na primeira foto da faixa,

$$X_p = X_{obs,1} \quad (3.9)$$

$$Y_p = Y_{obs,1} \quad (3.10)$$

$$Z_p = 0 \quad (3.11)$$

b) para os demais pontos do triplete,

$$X_p = X_{i+1}^c + x_{obs,i+1} \quad (3.12)$$

$$Y_p = Y_{i+1}^c + y_{obs,i+1} \quad (3.13)$$

$$Z_p = 0, \quad (3.14)$$

onde:

$X_p$ ,  $Y_p$  e  $Z_p$  são as coordenadas iniciais dos pontos e

$x_{obs,i+1}$  e  $y_{obs,i+1}$  são as coordenadas observadas no sistema fotogramétrico, da (i+1)-ésima foto do triplete.

### 3.2.3. Aplicação da equação de colinearidade

Para se ajustar o triplete, faz-se uso da equação de colinearidade, com as coordenadas observadas isentas de erros sistemáticos. A equação de colinearidade relaciona o espaço objeto com espaço imagem, formando o modelo estereoscópico por

intersecção de raios homólogos.

Conforme a figura (3.2), verifica-se que, para formar o tripleto, são envolvidos três sistemas fotogramétricos e um referencial no espaço objeto.

Como se efetua um pré-refinamento das coordenadas observadas, pode-se considerar o modelo matemático da equação de colinearidade do tipo explícito. Neste caso, as quantidades observadas são funções explícitas das quantidades a determinar, ou seja:

$$L_a = F(X_a). \quad (3.15)$$

O procedimento matemático utilizado, para ajustar pelo MMQ é o paramétrico, onde a equação 3.15, linearizada produz:

$$AX + L = V \quad (3.16)$$

$$X = -N^{-1}U \quad (3.17)$$

$$N = A^T P A \quad (3.18)$$

$$U = A^T P L \quad (3.19)$$

$$X^a = X^o + X \quad (3.20)$$

$$\Sigma_x = \hat{\sigma}^2 N^{-1} \quad (3.21)$$

onde:

$X^a$  é o Vetor dos parâmetros ajustados,

$X^o$  é o Vetor dos parâmetros aproximados,

$X$  é o Vetor das correções aos parâmetros aproximados,

$L_b$  é o Vetor das observações e

$\Sigma_x$  é a Matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados.

$P$  é a Matriz peso das observações.

$$P = \sigma_o^2 * Q_{11}^{-1}$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

onde:

$\sigma_o^2$  é a Variância da observação de peso unitário e

$\hat{\sigma}_o^2$  é a Variância estimada "a posteriori" de peso unitário.

A matriz  $N$ , é singular, portanto não possui inversa<sup>4</sup>, porque o sistema de referência não foi definido. A deficiência de característica, da matriz  $N$  é sete<sup>5</sup>, havendo a necessidade de introduzir injunções, para que se possa inverter pela álgebra de Cayley.

A fim de resolver esta singularidade, aplicam-se as

<sup>4</sup> A matriz  $N$  não possui inversa na álgebra de Cayley.

<sup>5</sup> Injunções mínimas para se definir um sistema de coordenadas.

injunções, que podem ser: nas coordenadas dos pontos; nos elementos de orientação exterior; nas coordenadas dos pontos e nos elementos de orientação; ou com feições e com um dos casos acima, para minimizar o controle.

Como o ajustamento do tripleto será executado num sistema arbitrário, para cada faixa do bloco optou-se por aplicar injunções posicionais nos elementos de orientação da primeira foto ( seis injunções), para o primeiro tripleto da faixa e introduz-se mais uma injunção na coordenada Z do ponto mais central da primeira foto. Para os demais tripletos, além das injunções nos parâmetros de orientação exterior na primeira foto, definidas no ajustamento anterior, aplicam-se as injunções nos pontos de ligação dos modelos do tripleto anterior.

A introdução de injunções no método paramétrico será dada pelo modelo adicional,

$$L_x = G(X_a) \quad (3.22)$$

sendo que,

$$G(X_a) = X_a \quad (3.23)$$

representa o vetor dos parâmetros ajustados e  $L_x^6$  o vetor das observações dos parâmetros.

Através da equação (3.15) e lembrando que o modelo original era  $L_a = F(X_a)$  que linearizado fornecerá,

<sup>6</sup>  $L_x$  é o vetor que contém as coordenadas dos pontos de apoio no espaço objeto, agora considerados como uma observação



$$AX + L = V$$

e

$$CX + L_x = V_x$$

ou

$$L_o = X_o$$

então  $L_x$  é a diferença entre o valor do parâmetro estimado e seu valor fixado pela injunção, logo o vetor  $X$ , correção aos parâmetros, será dado por:

$$X = -(A^T P A + C^T P_x C)^{-1} (A^T P L + C^T P_x L_x)$$

ou

$$X = -(N + N^C)^{-1} (U + U^C)$$

onde:

$P_x$  é a matriz peso das injunções

$$P_{x_{ii}} = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{x_i}^2}$$

$\sigma_o^2$  é a variância da observação de peso unitário

$\sigma_{x_i}^2$  é a variância do ponto de controle, correspondente ao parâmetro a ser fixado

Sendo a matriz  $C = \frac{\partial G}{\partial X} \Big|_{X_o} = X'_o$  e como  $G(X_o) = X_o$ , a matriz  $C$  terá o mesmo número de colunas da matriz  $A$  e terão tantas linhas quanto forem as injunções, tendo elementos com valor igual a 1 (um) na posição correspondente da injunção efetuada e 0 (zero) nas outras posições.

Portanto na matriz  $\overset{\circ}{N} = C^T P_x C$ , os elementos não nulos estarão sobre a diagonal em posição correspondente à posição dos parâmetros fixados, e este valor será o peso da injunção. Da mesma forma o vetor  $\overset{\circ}{U} = C^T P_x L_x$ , terá também elementos não nulos nas posições correspondentes aos parâmetros fixos.

A resolução de sistemas de equações normais, constitui-se numa importante fase do ajustamento. No caso da fotogrametria a importância torna-se maior devido ao grande número de equações normais. E também na fotogrametria, a matriz dos coeficientes das equações normais é definida positiva e simétrica, propriedades estas que permitirão algumas simplificações.

Foi utilizado o método de Choleski para resolver o sistema de equações, pois é um método de solução direta capaz de explorar a simetria e seis vezes mais rápida, se comparado com o método de resolver o sistema de equações pela inversa.

Como no procedimento adotado não se obtém a inversa da matriz normal (N). Entretanto a diagonal da matriz variância covariância ( $\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}^2 N^{-1}$ ) pode ser obtida, após a convergência do ajustamento, aplicando-se o procedimento da retro-substituição e da substituição direta, tendo como o vetor das constantes a coluna correspondente a diagonal da identidade.

A matriz N será montada cumulativamente, evitando montar a matriz A. Para isto cria-se um vetor correspondente a uma linha de A, calculando-se a contribuição da linha na matriz N e no vetor U.

O padrão e a simetria de N podem também ser aproveitados. No caso do padrão, foram considerados somente os

elementos não nulos da linha da matriz A. A simetria também foi explorada, através de algoritmo que posiciona todos os elementos da parte triangular superior num vetor (apêndice D).

### 3.3. Depuração dos E.G.

Nesta etapa, faz-se a depuração dos erros grosseiros nas marcas fiduciais e nas fotocoordenadas observadas progressivamente.

#### 3.3.1. Depuração dos E.G. do tipo A nas marcas fiduciais

A repetição das observações de todos os pontos numa fototriangulação não é uma prática comum, mas como as fotocoordenadas estão referenciada ao sistema fiducial, é recomendada pelo menos três repetições nas leituras das marcas fiduciais.

As marcas fiduciais podem ser depuradas dos erros grosseiros após a última marca ser observada, onde a primeira depuração pode ser efetuada calculando-se a média e os resíduos.

Assim os resíduos que não atenderem a um critério ( $\sqrt{2}$  \* desvio padrão do instrumento) a sua marca será reobservada.

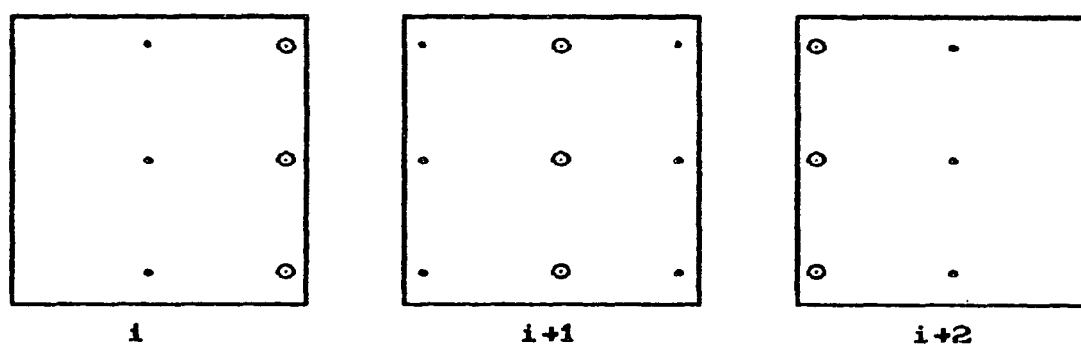
#### 3.3.2. Depuração dos E.G. do tipo A nas observações

Nesta etapa do trabalho, a verificação do erro grosseiro, faz-se por simples comparação das fotocoordenadas x e y, já transformadas e corrigidas dos erros sistemáticos.

A primeira verificação pode ser efetuada comparando-se as coordenadas dos pontos com um valor máximo,

que no caso é a metade do quadro focal da câmara, no caso do estereocomparador este erro deixará de ocorrer.

A segunda verificação pode ser efetuada nos pontos de ligação, que são observados duas vezes (figura 3.4).



○ → pontos de ligação

Figura 3.4 - Posição dos pontos de ligação nas fotos do triplete.

Na figura acima pode-se observar que o ponto de ligação da foto  $i+1$  são observados duas vezes, quando da formação do primeiro e do segundo modelo. Depurando-se os erros sistemáticos das coordenadas, as do ponto de ligação da segunda foto do primeiro modelo observado teria o mesmo valor da primeira foto do segundo modelo. Assim, pode-se verificar a existência de erro grosseiro, entre as duas observações do mesmo ponto, através da seguinte relação,

$$|x_1 - x_2| < d$$

(3.25)

$$|y_1 - y_2| < d$$

com,

$$d = \sqrt{2} * \sigma_l$$

onde:

$x_1$  e  $y_1$  são as coordenadas dos pontos de ligação da foto  $i+1$  quando da observação do primeiro modelo do triplete,

$x_2$  e  $y_2$  são as coordenadas dos pontos de ligação da foto  $i+1$  quando da observação do segundo modelo do triplete e

$\sigma_1$  é a precisão nominal do instrumento.

Estando o ponto com erro, repete-se a leitura  $(x_2, y_2)$ ; caso a leitura se repita, provavelmente o erro estará na observação do modelo anterior. Neste caso, a observação do modelo anterior será abandonada e o ponto ajustado somente com as observações do modelo atual.

### 3.3.3. Depuração dos E.G. do tipo C nas marcas fiduciais

Os erros grosseiros do tipo C e D nas marcas fiduciais podem ser depurados simultaneamente, pois o modelo matemático adotado relaciona dois sistemas de coordenadas (fiducial e de máquina), e ainda uma depuração (erros do tipo A) já foi executada.

Assim as coordenadas observadas das marcas fiduciais estão confiáveis, ou seja, com discrepâncias aceitáveis em relação à média obtida; mas há a possibilidade de se cometer um erro sistemático na pontaria, que pode ser ocasionado pelo dimensionamento incorreto entre a marca fiducial e a marca de medição do instrumento.

Então faz-se necessária a aplicação de uma transformação geométrica afim, isogonal ou ortogonal. A transformação afim (seis parâmetros), devido a muitos parâmetros pode modelar os erros cometidos, gerando resíduos pequenos. A ortogonal como já comentado é inconveniente pelo

procedimento iterativo.

Neste caso optou-se pela transformação isogonal no plano (quatro parâmetros). Para isto, desconsidera-se apenas uma marca fiducial para efetuar a transformação. Após a obtenção dos parâmetros, aplica-se a transformação inversa a esta marca fiducial, e então ela é verificada como se fosse um ponto de checagem. Qualquer erro será facilmente perceptível.

Se uma das marcas utilizadas para a transformação estiver afetada por erro grosseiro, os parâmetros absorverão este erro. Deve-se então repetir o procedimento, trocando-se os pontos, até que todos passem como ponto de checagem.

Com o modelo matemático isogonal no plano escrito abaixo,

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + \Delta x \\ y' &= -bx + ay + \Delta y, \end{aligned} \quad (3.26)$$

matricialmente tem a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

e

para transformação inversa,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' - \Delta x \\ y' - \Delta y \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde:

$x'$  e  $y'$  são as coordenadas observadas das marcas fiduciais,

$x$  e  $y$  são as coordenadas calibradas das marcas fiduciais e  $a, b, \Delta x, \Delta y$  são os parâmetros da transformação.

As câmaras aerofotogramétricas mais comuns possuem quatro marcas fiduciais, assim a transformação é efetuada com três, ficando a quarta como ponto de checagem.

Terminando estas operações, pode-se obter discrepâncias entre as coordenadas fiduciais calibradas e as coordenadas dos pontos transformados, calculando-se o "desvio" da seguinte forma,

$$V_x = x'_i - x_{c_i} \quad (3.29)$$

$$V_y = y'_i - y_{c_i} \quad (3.30)$$

então o erro grosseiro pode ser detectado se,

$$| V_x | > EM_x \quad \text{e}$$

$$| V_y | > EM_y \quad ,$$

onde:

$x'_i, y'_i$  são as coordenadas observadas do ponto  $i$  ,

$x_{c_i}$  e  $y_{c_i}$  são as coordenadas transformadas, calculadas do ponto  $i$  ,

$n$  é o número de pontos (marcas fiduciais) ,

$EM_x$  é o valor definido como máximo erro admitido na coordenada  $x$  e

$EM_y$  é o valor definido como máximo erro admitido na coordenada  $y$ .

#### 3.3.4. Depuração dos E.G. do tipo C nas observações

O processo de depuração de erros grosseiros do tipo C nos pontos de interesse iniciar-se-á somente a partir das observações do segundo modelo de cada faixa, problema que pode ser contornado usando-se uma foto a mais no começo e no fim de cada faixa, pois sabe-se que todas as faixas do bloco são fotografadas com esta margem de segurança.

Assim, fototriangulação analítica em linha se iniciaria no modelo anterior ao de interesse, e no caso de um ajustamento simultâneo posterior, abandonaria as observações e os parâmetros aproximados das fotos auxiliares.

Nesta etapa, após o ajustamento do triplete, pode-se detectar erros grosseiros analisando-se os resíduos, depurando assim somente os de magnitudes maiores.

Esta análise, terá como objetivo os resíduos que apresentarem valores maiores do que os estipulados anteriormente (capítulo 02). Estas observações serão descartadas se referirem a observações do primeiro modelo (cujo modelo já fora retirado do instrumento). Se forem do segundo modelo, elas serão reobservadas.

Esta análise será efetuada, dividindo-se os resíduos das observações pelo desvio padrão da unidade de peso a posteriori, este resultado será comparado a um valor estipulado, que será definido através de testes.

#### 3.3.5. Depuração dos E.G. do tipo D nas obsevações

Os erros grosseiros do tipo D, podem ser depurados através de modelos estatísticos "Danish Method" e "Data Snooping".



O "Danish Method" não considera a geometria do ponto, para tentar solucionar este problema pode-se utilizar de constantes "c" (da equação 2.01) diferentes para cada posição do ponto.

No "Data Snooping", para calcular os valores de  $q_{vv}$  o dispêndio computacional é muito grande, quando se utiliza do Método de Choleski para resolver o sistema de equações. Entretanto para tentar minimizar o dispêndio computacional pode-se calcular os valores de  $q_{vv}$  usando-se dos modelos matemáticos descritos em Gruen - 1982, com algumas modificações.

Considerando o vetor da matriz identidade (I),

$$f_{1,n}^T = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \text{ e}$$

com vetor solução,

$$X_i = (A^T P A)^{-1} A^T P f_i. \quad (3.31)$$

A matriz  $Q_{vv}$  é dada pela seguinte equação,

$$Q_{vv} = P^{-1} - A (A^T P A)^{-1} A^T \quad (3.32)$$

pós multiplicando por  $P f_i$  tem-se,

$$Q_{vv} P f_i = I f_i - A (A^T P A)^{-1} A^T P f_i, \quad (3.33)$$

que resulta em:

$$Q_{vv} P f_i = I f_i - A X_i . \quad (3.34)$$

Considerando a matriz peso (P) diagonal, genericamente tem-se:

$$(q_{vv})_{ki} = (t - a_{k i}^T x_i) / p_i , \quad (3.35)$$

onde,

$$t = \begin{cases} 1 & \text{para } i=k \\ 0 & \text{para } i \neq k \end{cases} .$$

Para calcular o valor de " $x_i$ " da equação 3.35, verifica-se que há um grande dispêndio computacional, mas analisando-se o termo  $A^T P f_i$  e o termo  $A^T P A$  pode-se fazer algumas considerações.

O termo  $A^T P f_i$  resulta num vetor ( $U_i$ ) que é igual a  $i$ -ésima linha da matriz A, linha esta que é definida pelo vetor  $f_i$ .

O termo  $A^T P A$  resulta na matriz N, que foi fatorizada no processo de resolução do sistema de equações normais, no ajustamento convencional.

Assim usando-se o método de Choleski para resolver o sistema de equações (3.31), calcula-se o valor do vetor  $X_i$  usando-se somente a etapa da retro substituição e substituição direta.

## DEPURAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS NOS PONTOS DE ENLACE E CONTROLE

### 4.1. Introdução

Para a depuração de erros grosseiros nos pontos de controle, admite-se que todos os eventuais erros nas fotocoordenadas já foram depurados.

Nesta etapa de depuração dos erros grosseiros o bloco estará formado num sistema tridimensional arbitrário, onde os pontos de ligação estão isentos dos erros. Com a finalidade de efetuar a transformação deste para o sistema do terreno (controle), há a necessidade da utilização dos pontos de controle.

Estes pontos de controle são determinados a partir de observações, geralmente executadas em campo em condições não ideais, podendo conter erros grosseiros, que serão propagados nas coordenadas no cálculo. Podem ocorrer ainda erros na introdução dos dados, tais como: numeração errada, troca de dígitos, etc.

Com isto, considerou-se que os pontos de controle, são passíveis de erros grosseiros, e que devam passar por um controle de detecção e localização, para que o erro cometido não afete todo o trabalho, e forneça resultados não confiáveis.

Para efeito de detecção e localização de erros grosseiros nos pontos de controle, proceder-se-á como no caso anterior, ou seja, depuração dos erros progressivamente. Para isto, subdivide-se em duas partes, a primeira em detectar erros de grandes magnitudes ( $50\sigma_1$ ), usando as coordenadas planimétricas em separado da altimétrica do controle. A

segunda parte é a detecção de erros de pequena magnitude ( $4\sigma_1$  a  $50\sigma_1$ ), usando para isto a transformação isogonal junto com a Estimativa Robusta.

O procedimento sequencial foi adotado para depurar erros grosseiros nos pontos de controle, para isto foi necessário a formação sequencial do bloco, ou seja, concatenando-se as faixas uma às outras até que a última seja concatenada formando assim o bloco num sistema arbitrário.

A sequência adotada neste trabalho é depurar os erros grosseiros nos pontos de ligação entre as faixas primeiro e após esta verificação depurar erros grosseiros do tipo B (quarto passo) nos pontos de controle. Os erros grosseiros do tipo C e D são depurados com o mesmo modelo matemático e na mesma etapa.

Para efetuar este procedimento sequencial de depuração de erros grosseiros nos pontos de controle e dar a continuidade no procedimento sequencial de fototriangulação foram elaborados programas, na linguagem Fortran, para ligação das faixas até a formação do bloco e a transformação deste para o sistema do controle.

A fototriangulação simultânea por feixes perspectivos foi elaborada a fim de verificar a eficiência do procedimento sequencial em gerar dados e verificar através do teste qui-quadrado a qualidade das observações depuradas dos erros grosseiros.

Esta etapa da fototriangulação caracteriza o procedimento "off-line", que é essencialmente um procedimento onde as observações são tratadas quando a última observação for efetuada, ou seja, as observações e o processamento são

tratadas como duas etapas distintas de trabalho.

#### 4.2. Concatenação das faixas

Esta é uma etapa de grande importância, tanto como uma etapa auxiliar na depuração de erros grosseiros, como na transformação do bloco fototriangulado num sistema único. Para uma melhor visualização das etapas executadas pelo programa, há um fluxograma deste no apêndice B-1.

A concatenação das faixas, para formar o bloco, se resume na determinação de parâmetros de transformação entre as faixas adjacentes, sucessivamente, e na aplicação da transformação a todos os pontos da faixa a ser concatenada.

A fototriangulação sequencial com concatenação das faixas será executada basicamente, concatenando-se as duas primeiras faixas do bloco através de uma transformação geométrica, formando com isto um sub-bloco. A este sub-bloco, considerado agora como uma faixa, será ajustada a terceira faixa, pela transformação escolhida, fazendo que o sub-bloco se estenda até a terceira faixa. O processo se repete até que a última faixa do bloco passe a integrar o bloco então formado.

A fototriangulação completar-se-á com a transformação do bloco formado para o sistema de coordenadas do ponto de controle, que pode ser efetuada através de modelos matemáticos conhecidos.

Devido a dificuldades de se encontrar uma transformação ou um modelo matemático adequado, procurou-se então utilizar três modelos matemáticos conhecidos : Afim, Isogonal e Polinomial ( do segundo grau). Assim, pode-se

verificar qual a melhor transformação para cada caso, que será discutido no capítulo 5.

#### 4.2.1. Concatenação de faixas com transformação isogonal

O modelo matemático utilizado é a equação,

$$X' - \lambda * R * X - X_0 = 0 \quad (4.1)$$

que está na forma  $F(X_a, L_a) = 0$ , sendo uma função implícita. Os vetores  $X$  e  $X'$  são da mesma espécie (observações), os parâmetros são:  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\kappa$ ,  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ . Por conveniência, adota-se a mesma equação (4.1), e considera-se  $X$  constante, ficando agora o modelo matemático numa forma explícita.

$$F(X_a) = L_a$$

Aplicando este modelo no ajustamento, há a necessidade de iteração, pois foi linearizado pela série de Taylor. Assim desenvolvendo a equação 4.1, de forma a torná-la uma função explícita, tem-se:

$$X' = \lambda * R * X + X_0. \quad (4.2)$$

Os pontos comum às duas faixas propiciam um conjunto de três equações por ponto. Através de três ou mais pontos os sete parâmetros da transformação são estimados pelo método dos mínimos quadrados e a equação 4.1 é aplicada para todos os pontos da faixa. A matriz  $R$  e o desenvolvimento da equação 4.1 podem ser encontrados com detalhes em [24].

#### 4.2.2. Concatenação das faixas com transformação afim

A equação utilizada na transformação afim para a concatenação das faixas em bloco é:

$$X' = A * X + T \quad (4.3)$$

onde, A é uma matriz 3x3 contendo nove parâmetros incógnitos. O vetor T contém três parâmetros, totalizando doze parâmetros de transformação.

Com a utilização de cinco ou mais pontos comuns entre as duas faixas, pode-se efetuar o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados. Depois de se calcular os parâmetros incógnitos (12), faz-se a transformação inversa,

$$X = A^{-1}(X' - T). \quad (4.4)$$

Esta equação é aplicada a todos os pontos da faixa.

A equação (4.3) a rigor é uma função implícita, cabendo aqui a aplicação do método combinado. Mas, pela facilidade computacional e pela comodidade, utilizou-se do método paramétrico, admitindo então o vetor X como constante e não como observação.

Devido ao padrão da matriz  $A = \frac{dF}{dX_a} \Big|_{X_0=X_a}$ , pode-se

prever um padrão de N que possibilitará algumas otimizações, considerando que todas as observações tenham a mesma variância, e não sejam correlacionadas. Fazendo tais considerações pode-se escrever a equação 4.6 da seguinte forma:

$$X_a = -CA^T A^{-1} A^T L$$

$$L = L_o - L_b$$

$$L_o = FCX_o$$

Analisando o padrão da matriz A e posicionando as observações adequadamente, pode-se observar que a matriz N, terá também um padrão conhecido. Pode-se dizer que a matriz N é bloco diagonal, ou seja, é constituída de três sub-matrizes iguais, quadradas e de dimensão quatro.

$$N = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

onde,

$$B = \begin{bmatrix} \sum_i^2 & \sum_i y_i & \sum_i z_i & \sum_i \\ & \sum_i^2 & \sum_i z_i & \sum_i \\ \text{simétrica} & & \sum_i^2 & \sum_i \\ & & & n \end{bmatrix}$$

para i = 1,2,...,n

4.2.3. Concatenação de faixas com polinômio

O polinômio utilizado na transformação é:

$$\begin{aligned} \Delta X &= a_o + a_1 X - b_1 Y + c_1 Z + a_2 X^2 - 2b_2 XY + 2c_2 XZ \\ \Delta Y &= b_o + b_1 X + a_1 Y - d_1 Z + b_2 X^2 + 2a_2 XY - 2d_2 XZ \\ \Delta Z &= c_o - c_1 X + d_1 Y + a_1 Z - c_2 X^2 - 2d_2 XY + 2a_2 XY \end{aligned} \tag{4.5}$$



onde,

$$\Delta X = X' - X$$

$$\Delta Y = Y' - Y$$

$$\Delta Z = Z' - Z$$

Tem-se onze parâmetros de transformação ( $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2$ ). As equações (4.5) são encontradas em [11] pág. 57.

A equação (4.5) é uma função implícita, cabendo aqui também aplicação do método combinado ( $F(X_a, L_a) = 0$ ). Mas neste caso também por comodidade, aplicou-se o método paramétrico ( $F(X_a) = L_a$ ), onde foi considerado  $X, Y, Z$  isentos de erros.

#### 4.3. Cálculo das Coordenadas no Espaço Objeto

O bloco formado no sistema de coordenadas tridimensional, constitui um modelo reduzido da porção do terreno fotografado. Na transformação do sistema de bloco para o sistema do controle, pode-se considerar que a diferença entre os dois se deva a vários fatores, tais como: diferença de escalas, translação, rotação e outros fatores de menor influência.

Esta etapa do processo de determinação de coordenadas ( $X, Y, Z$ ) no sistema do terreno, pode, dependendo da escala e da precisão desejada, ser a etapa final do ajustamento, tornando assim este método mais interessante quando o computador utilizado é de pequeno porte, pois o procedimento não exige grandes capacidades computacionais.

Mas se a precisão desejada não for alcançada nesta

etapa, ainda há a grande vantagem do procedimento, no sentido de verificar erros grosseiros nos pontos de controle. Também é de fundamental importância, gerar coordenadas dos pontos objeto e dos parâmetros de orientação exterior com boa aproximação, para o ajustamento simultâneo a ser efetuado posteriormente, podendo também depurar os erros grosseiros dos pontos de controle e das observações fotogramétricas em geral.

Utilizou-se aqui, três modelos matemáticos, com os quais foram executados vários testes, a fim de tentar verificar qual melhor se adapta para as distribuições que serão testadas no capítulo 6. Os modelos de transformações utilizadas foram: modelo afim, modelo isogonal e modelo polinomial.

Tabela 4.1 - Transformações utilizadas nos programas de concatenação das faixas e transformação de sistemas.

programa	concatenação das faixas	transformação de sistemas bloco → terreno
01	Isogonal	Isogonal
02	Afim	Afim
03	Polinomial	Polinomial
04	Isogonal	Afim
05	Isogonal	Polinomial

Elaboraram-se vários programas, utilizando estes modelos, conforme a tabela 4.1 e para cada caso fizeram-se testes com vários tamanhos de bloco e várias distribuições de pontos.

#### 4.4. Depuração dos E.G. nos pontos de enlace

Os erros aqui existentes são os que podem ter sido provocados pelo mau posicionamento da marca de medição no ponto e/ou identificação incorreta dos pontos, pois na etapa anterior já foram verificados os erros de má observação estereoscópica, ou seja, má eliminação das paralaxes em "x" e "y". E ainda, estes pontos (enlace) são transferidos faixa a faixa no "pug" (perfurador de pontos), provocando com isto uma maior incidência de erros grosseiros pelo local onde estes pontos se encontram (cantos do modelo).

Assim a verificação e localização de erros grosseiros nesta etapa só se processa nos pontos comuns às faixas adjacentes. Para isto utiliza-se a transformação isogonal aproximada, que é executada da faixa " $i + 1$ " para a faixa " $i$ ", conforme a Figura 4.1.

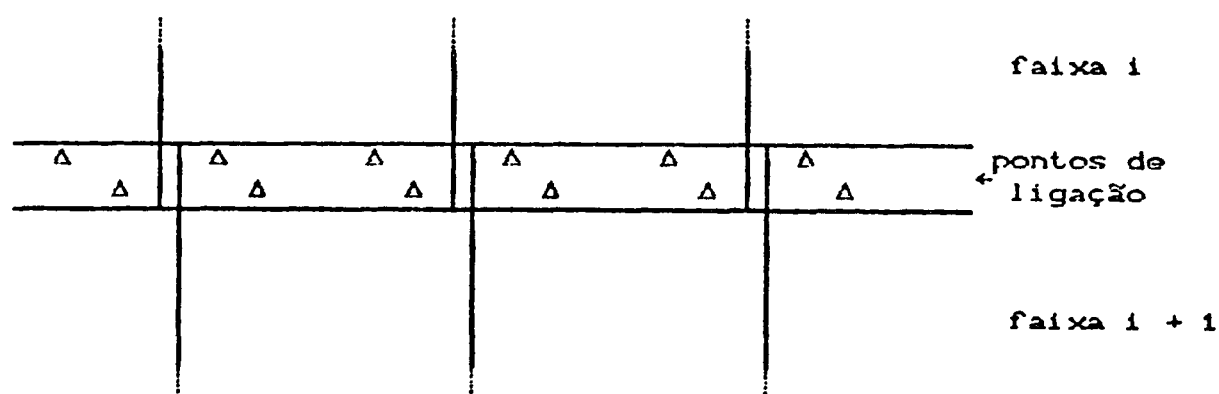


Figura - 4.1 - Posição dos pontos de ligação entre as faixas.

Como numa aeropoligonação (analógica ou analítica em menor proporção), pode haver um desvio dos pontos no fim da faixa e maior ainda na concatenação das faixas, que pode ser verificado pela propagação dos erros. Assim, nesta etapa não

houve a preocupação em se aproveitar os parâmetros para concatenar as faixas, devido à propagação dos erros na concatenação das mesmas.

Utilizou-se a transformação com menor número de parâmetros (Trans.Isogonal) com a finalidade de detectar erros grosseiros, evitando assim uma super parametrização do modelo, que poderia mascarar os resultados, absorvendo os possíveis erros sistemáticos e grosseiros da faixa.

O modelo matemático utilizado na transformação é o isogonal (4.1) , que junto com as equações 2.02 (Estimativa Robusta) permitem depurar os pontos de ligação dos erros grosseiros.

#### 4.5. Depuração dos E.G. do tipo B

Os erros de grande magnitudes nos pontos de controle podem ser ocasionados principalmente por: identificação incorreta nas fotos; erro na digitação das coordenadas e erros dos números dos pontos. Usa-se para detectar esses erros o modelo isogonal no plano para as coordenadas planimétricas. Para verificar as coordenadas altimétricas usa-se o fator de escala definido anteriormente e duas rotações, fazendo o plano formado pelo modelo ficar paralelo ao do terreno.

Para se transformar o bloco<sup>7</sup> arbitrário para o sistema do terreno aplica-se o modelo matemático de transformação isogonal. Através dos pontos de controle existentes, o bloco fototriangulado (no sistema arbitrário) será transformado pela relação geométrica no plano formado

<sup>7</sup> O bloco deverá estar formado num sistema de coordenadas único.

pelos eixos planimétricos, onde as coordenadas transformadas dos pontos de controle serão comparadas com as obtidas em campo (apoio). As diferenças existentes permitirão verificar eventuais erros grosseiros nos pontos de controle.

Para calcular os parâmetros da transformação (bloco arbitrário para o terreno), toma-se dois pontos nos extremos do bloco e calcula-se os quatro parâmetros. Faz-se então uma transformação inversa aos pontos no bloco fotogramétrico.

A diferença das coordenadas (transformadas e controle), nos indicará a existência ou não de erros grosseiros. Este processo é semelhante ao da verificação das marcas fiduciais. Se as diferenças calculadas após a transformação forem grandes (valor este que será estipulado quando dos testes) em todos os pontos, o ponto escolhido na transformação estará com erro grosseiro. Troca-se então o ponto usado na transformação e repete-se a operação até encontrar os pontos com erros grosseiros.

Com o modelo matemático isogonal no plano:

$$\begin{aligned} X' &= aX + bY + \Delta X \\ Y' &= -bX + aY + \Delta Y \end{aligned} \quad (4.6)$$

aplicadas a dois pontos, obtém-se:

$$\begin{aligned} X'_1 &= aX_1 + bY_1 + \Delta X \\ Y'_1 &= -bX_1 + aY_1 + \Delta Y \\ X'_2 &= aX_2 + bY_2 + \Delta X \\ Y'_2 &= -bX_2 + aY_2 + \Delta Y. \end{aligned}$$

Com algumas operações matemáticas, obtém-se os valores dos parâmetros (a,b,ΔX,ΔY), ou seja:

$$a = \frac{\Delta Y' DY + \Delta X' DX}{DXDX + DYDY} \quad (4.7)$$

$$b = \frac{\Delta X' DY - \Delta Y' DX}{DXDX + DYDY} \quad (4.8)$$

$$\Delta X = X'_1 - aX_1 - bY_1 \quad (4.9)$$

$$\Delta Y = Y'_1 + bX_1 - aY_1 \quad (4.10)$$

ou,

$$\Delta X_2 = X'_2 - aX_2 - bY_2 \quad (4.11)$$

$$\Delta Y_2 = Y'_2 + bX_2 - aY_2 \quad (4.12)$$

onde:

$$\Delta X' = X'_1 - X'_2$$

$$\Delta Y' = Y'_1 - Y'_2$$

$$DX = X_1 - X_2$$

$$DY = Y_1 - Y_2$$

Aplicando a equação 4.6, em outros pontos, obtém-se as discrepâncias para análise,

$$V_x = X'_i - X_{c_i} \quad (4.13)$$

$$V_y = Y'_i - Y_{c_i} \quad (4.14)$$

onde:

$X_i, Y_i$  são as coordenadas do ponto i, no sistema arbitrário do modelo,

$X'_i, Y'_i$  são as coordenadas do ponto i, de controle no sistema local triortogonal,

$X'_{c_i}$  e  $Y'_{c_i}$  são as coordenadas transformadas, calculadas do

ponto i.

Agora o procedimento adotado para depurar os erros de grandes magnitudes nos pontos de controle é efetuado em duas etapas. A primeira, estando o bloco fotogramétrico num único sistema, calcula-se um fator de escala aproximado para o bloco, ( $\lambda^2 = a^2 + b^2$ ), onde a e b são obtidos na etapa de detecção dos erros grosseiros planimétricos. Multiplicando-se todas as coordenadas pelo fator de escala, tem-se como resultado um modelo em escala aproximadamente igual ao do terreno.

Como esta transformação isogonal no plano posicionou o bloco quase que coincidentemente ao terreno, assim, somente as coordenadas planimétricas estão com os valores próximos ao do apoio.

Agora o modelo pode estar com inclinação em relação ao terreno, que deve ser corrigida através de duas rotações, uma em torno do eixo "X" e outra em torno do eixo "Y".

A primeira correção desta inclinação a ser efetuada é em torno do eixo Y, que é dada pelas fórmulas abaixo:

$$\Delta Z_{\max} = Z_1^a - z_1 \quad (4.15)$$

$$\Delta Z_{\min} = Z_2^a - z_2 \quad (4.16)$$

$$\Delta X = X_{\max} - X_{\min} \quad (4.17)$$

$$\tan(\alpha_x) = (\Delta Z_{\max} - \Delta Z_{\min}) / \Delta X \quad (4.18)$$

$\alpha_x$  é a inclinação a ser corrigida entre o modelo e o terreno na direção X,

$z_1, z_2$  são as coordenadas altimétricas do bloco,

$Z_1^a, Z_2^a$  são as coordenadas altimétricas de controle e

$X, Y$  são as coordenadas planimétricas do bloco,  
o valor da coordenada corrigida é calculada da seguinte forma,

$$Z_i^c = z_i + \tan(\alpha_x) / (X_{\text{ponto}} - X_{\text{min}}). \quad (4.19)$$

$Z_i^c$  é a coordenada altimétrica corrigida.

A segunda rotação foi em torno do eixo  $X$ , efetuado de forma semelhante à anterior,

$$\Delta Z_{\text{max}} = Z_1^a - z_1 \quad (4.20)$$

$$\Delta Z_{\text{min}} = Z_2^a - z_2 \quad (4.21)$$

$$\Delta Y = Y_{\text{max}} - Y_{\text{min}} \quad (4.22)$$

$$\tan(\alpha_y) = (\Delta Z_{\text{max}} - \Delta Z_{\text{min}}) / \Delta Y \quad (4.23)$$

$\alpha_y$  é a inclinação a ser corrigida entre o modelo e o terreno na direção  $Y$ .

o valor da coordenada corrigida é calculada da seguinte forma,

$$Z_i^c = z_i + \tan(\alpha_y) / (Y_{\text{ponto}} - Y_{\text{min}}). \quad (4.24)$$

Após aplicar as transformações acima, pode-se depurar os erros grosseiros de grande magnitude na coordenada  $Z$  por comparação, como no procedimento anterior (planimetria).

#### 4.6. Depuração do E.G. do tipo C e D

Como o bloco é definido pelas coordenadas tridimensionais dos pontos e foi calculado em duas etapas (item 4.5), esta pode estar rotacionado em torno dos três



eixos. Assim as distorções provenientes desta transformação aproximada podem mascarar os erros grosseiros de pequena magnitude, e também conforme a extensão da faixa, pode ocorrer uma propagação de erros, tornando assim o erro propagado maior que o erro grosseiro. Esta propagação de erro poderia ser minimizada subdividindo-se as faixas. Entretanto, esta solução pode ser inviabilizada pelo reduzido número de pontos de controle, segundo [30] p. 103. No bloco este problema torna-se mais grave, pois além das deformações causadas ao longo das faixas, existem as da concatenação das faixas, que parecem ser maiores.

Assim nesta etapa, admite-se que todos os erros grosseiros de magnitudes maiores que  $50 \sigma_1$  foram depurados, restando portanto erros menores.

Através dos pontos de controle existentes e dos mesmos obtidos na formação da faixa e do bloco no sistema arbitrário, efetua-se a transformação isogonal no espaço, transformando o bloco do sistema arbitrário para o sistema do controle.

Para a depuração dos erros grosseiros nos pontos de controle (apoio) utilizou-se da função peso (Estimativa Robusta), que junto com o procedimento de ajustamento é capaz de depurar os erros.

#### 4.7. Fototriangulação Simultânea por feixes perspectivos (bundle)

Dentre os vários procedimentos para fototriangulação analítica, a fototriangulação simultânea por feixes de raios perspectivos produz melhores níveis de precisão em relação ao sequencial.

O método adotado aqui, é a fototriangulação com pré-refinamento dos erros sistemáticos, pois no procedimento em linha, as fotocoordenadas foram depuradas destes erros.

##### 4.7.1. Considerações Gerais da Fototriangulação Simultânea por Feixes

Como já foi comentado, a equação utilizada aqui é a de colinearidade, que impõe a condição de alinhamento de três pontos (objeto, imagem e centro perspectivo), condição esta que pode ser obtida com um pré-refinamento das coordenadas observadas (aqui executado na formação do triplete).

O ajustamento de todos os feixes num bloco de fotografias envolve rotações e translações de cada feixe. Estes feixes são definidos pelas equações B-8, reescritas aqui, para uma melhor visualização,

$$x = -c_k \frac{m_{11}(X - X_c) + m_{12}(Y - Y_c) + m_{13}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)}$$

$$y = -c_k \frac{m_{21}(X - X_c) + m_{22}(Y - Y_c) + m_{23}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)}$$

nesta equação

$x, y$  são as fotocoordenadas corrigidas dos erros sistemáticos,

$m_{i,j}$  são os elementos da matriz de rotação,

$X, Y, Z$  são as coordenadas dos pontos,

$X_c, Y_c, Z_c$  são as coordenadas do centro perspectivo de cada foto  
e

$c_k$  é a distância focal calibrada.

Para cada raio do feixe pode-se escrever um par de equação deste tipo.

A equação de colinearidade é uma função explícita, da forma  $L_a = f(X_a)$ . Como se pode observar, no primeiro membro, estão as observações e no segundo os parâmetros ( $\omega, \phi, \kappa, X_c, Y_c, Z_c, X, Y, Z$ ). A equação não é linear, havendo a necessidade da linearização por Taylor, portanto iterações devem ser efetuadas. Então, valores aproximados dos parâmetros são requeridos.

Estes valores podem ser obtidos de várias maneiras. Por exemplo: adotando-se valores nulos aos elementos de orientação angular ( $\omega$  e  $\phi$ ) e com o auxílio de uma carta da área, obter as coordenadas dos CPs, dos pontos a serem fototriangulados e do parâmetro angular kappa ( $\kappa$ ). No caso optou-se por fototriangulação sequencial, que gera valores aproximados com pequenos desvios. Estes valores aproximados são muito importantes, pois deles depende a convergência e o tempo computacional gasto.

#### 4.7.2. Tratamento Matemático

As fotocoordenadas refinadas  $x$  e  $y$  constituem as observações no modelo paramétrico. Suas precisões dão origem à matriz dos pesos  $P$ , que serão considerados iguais e não

correlacionados para todas as observações, ficando assim a matriz  $P$  diagonal. E ainda, considerando todas as observações iguais e considerando o valor da variância da unidade de peso "a priori" igual à variância da observação, a matriz peso será igual à identidade ( $I$ ).

Assim, se num bloco,  $n_o$  pontos imagens são observados, tem-se  $2n_o$  elementos correspondentes em  $L_b$ . O número de parâmetros depende do número de pontos no espaço objeto e do número de fotografias que formam o bloco. Então num bloco de  $n_f$  fotos, existirão  $6n_f$  parâmetros de orientação exterior e os números de parâmetros referentes aos pontos (enlace, controle ou passagem), serão formados de tal forma, que a cada novo ponto observado, mais três parâmetros serão incorporados ao conjunto, perfazendo no final  $3n_p$  parâmetros, onde  $n_p$  é o número total de pontos. Portanto, o vetor  $L$  terá a dimensão igual a  $2n_o$ , e o vetor  $X$  igual a  $u$ , onde  $u = 6n_f + 3n_p$ .

O desenvolvimento matemático, as derivadas, e os elementos da matriz de rotação, estão no apêndice B.

#### 4.7.3. Problemas na montagem das Matrizes "A" e "N"

Na fototriangulação analítica com ajustamento simultâneo em bloco, os problemas de ordem numérica assumem proporções muito significativas. É comum a existência de blocos com milhares de incógnitas. Este fato faz com que o aspecto otimização seja seriamente considerado, tanto no problema de tempo de processamento, como no do espaço de armazenamento.

Na montagem da matriz  $N$ , pode-se economizar tempo e

memória do computador, Para isso, se faz necessário analisar as características da matriz A.

Pode-se verificar que a matriz A é composta de uma grande quantidade de elementos nulos, o que pode ser aproveitado na montagem da matriz N e no vetor U. Tendo-se que  $N = A^T P A$  e  $U = A^T P L$ , uma das primeiras considerações pode ser na montagem de N diretamente suprimindo a matriz A. A formação da N seria cumulativa, precisando para isto a criação de dois novos vetores, que corresponderiam a duas linhas da matriz A. Para um melhor esclarecimento deste programa, elaborou-se um fluxograma que se encontra no apêndice B-3.

#### 4.7.4. Injunções e Resolução de Sistemas

Para a resolução do sistema de equações normais  $X = -N^{-1}U$ , verifica-se que a matriz N é singular, porque o referencial local não foi realizado (definido). Logo a deficiência de característica é igual a sete. Isto indica que não haverá solução na álgebra de Cayley. Poderia ser resolvida pela utilização da pseudo inversa, que não é de interesse neste trabalho.

A fim de resolver esta singularidade aplicam-se injunções, neste caso relativas posicionais nas coordenadas dos pontos de controle.

Para resolver o sistema de equações normais foi usado o método de Choleski, pois a característica principal do método é explorar a simetria da matriz, possibilitando assim somente a utilização da parte triangular superior ou inferior da matriz simétrica. No caso deste trabalho estes elementos foram armazenados num vetor (ver apêndice A).

## TESTES

### 5.1. Introdução

A fim de verificar o algoritmo, a metodologia na depuração dos erros grosseiros e a eficiência dos programas computacionais desenvolvidos, alguns testes foram realizados. Para isto considerou-se três fases no trabalho:

- a ) formação das faixas analiticamente (fototriangulação em linha) com depuração dos erros grosseiros nas observações;
- b ) concatenação das faixas e transformação do bloco (sistema arbitrário) para o terreno com depuração de erros grosseiros nos pontos de enlace e controle, e
- c ) fototriangulação simultânea por feixes de raios com análise dos resultados.

### 5.2. Depuração dos Erros Grosseiros

Os dados aqui manipulados são fictícios, ou seja, as fotocoordenadas foram obtidas através de um programa computacional, simulando-se assim dados obtidos no comparador. Para isto um programa em linguagem "Basic" foi elaborado para gerar coordenadas observadas do par de fotografias do bloco.

Os dados iniciais básicos para gerar este bloco simulado, são as coordenadas planimétricas dos pontos e os parâmetros de orientação exterior das fotos, de forma que alimentando o programa com a escala da foto, distância focal e o desvio padrão da observação, pode-se gerar os dados necessários na escala escolhida.

Para incluir flutuações randômicas nas observações o programa utilizou a função (RND), que gera números aleatórios de 0 a 1. Como esta função gera números numa distribuição regular, ou seja, todos os valores no intervalo 0 a 1 tem a mesma probabilidade de ocorrer. Então o programa foi adaptado para que os valores gerados tenham uma distribuição normal.

Os dados utilizados foram gerados considerando a escala da foto igual a 1/5000, com uma câmara de distância focal de 200 mm, em um terreno com uma variação altimétrica média de 15% da altura de voo.

Com a finalidade de verificar a eficiência na detecção de erros grosseiros dos programas de fototriangulação em linha com "Data Snooping" ou "Danish Method". Vários testes foram realizados nas configurações 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5:

- distribuição (figura 5.1) com 25 pontos no triplete, resultando em 93 parâmetros incógnitos e 110 observações;
- distribuição (figura 5.2) com 15 pontos no triplete, alinhados em 5 colunas, resultando em 63 parâmetros incógnitos e 66 observações;
- distribuição (figura 5.3) com 15 pontos no triplete, alinhados em 3 colunas, resultando em 63 parâmetros incógnitos e 70 observações;
- distribuição (figura 5.4) com 15 pontos no triplete, com duplos pontos nas laterais, resultando em 63 parâmetros incógnitos e 70 observações e
- distribuição (figura 5.5) com 9 pontos no triplete, resultando em 45 parâmetros incógnitos e 42 observações.

Assim foram efetuados basicamente os seguintes testes:

- a ) teste 01 - depuração dos erros grosseiros nas marcas fiduciais;
- b ) teste 02 - depuração dos erros grosseiros do tipo A e C em uma observação (primeiro passo e segundo passo),
- c ) teste 03 - depuração dos erros grosseiros do tipo D em uma observação do triplete (terceiro passo) e
- d ) teste 04 - depuração dos erros grosseiros do tipo D em duas observações (terceiro passo).

Para os itens "c" e "d" foram efetuados testes utilizando-se o "Data Snooping" e "Danish Method" para se depurar os erros grosseiros.

A fim de se verificar a eficiência dos testes utilizou-se das cinco distribuições abaixo, onde será apresentada a foto central do triplete e a posição dos pontos.



(01)	(02)	(03)	(04)	(05)
(06)	(07)	(08)	(09)	(10)
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
(21)	(22)	(23)	(24)	(25)

Figura 5.1 - Posição dos 25 pontos no triplete, representada na foto central.

(01)	(02)	(03)	(04)	(05)
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
(21)	(22)	(23)	(24)	(25)

Figura 5.2 - Posição dos 15 pontos no triplete posicionados em 5 colunas, representada na foto central.

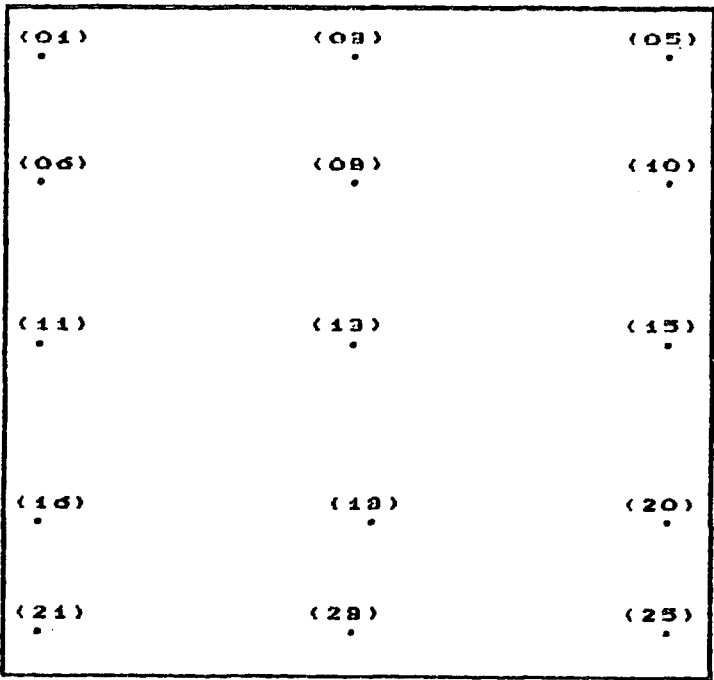


Figura 5.3 - Posição dos 15 pontos no triplete posicionados em 3 colunas, representada na foto central.

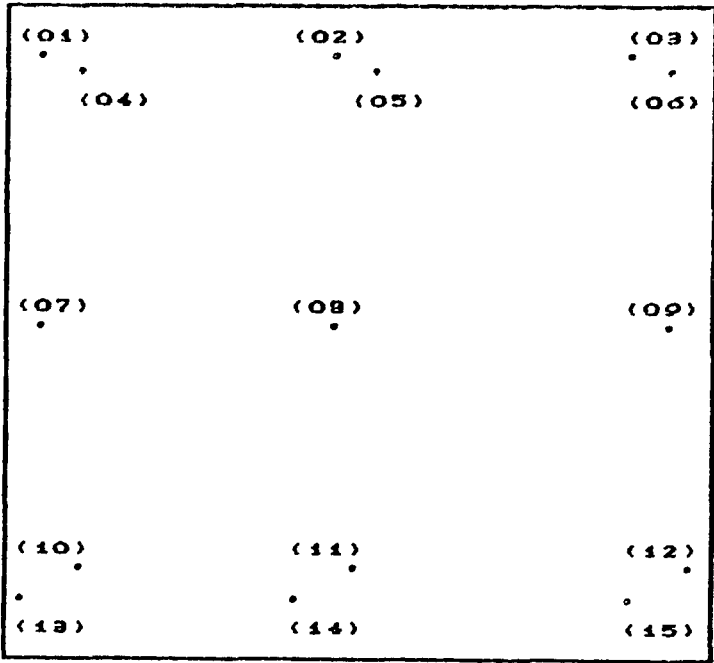


Figura 5.4 - Posição dos 15 pontos no triplete com dupla observação nas bordas, representada na foto central

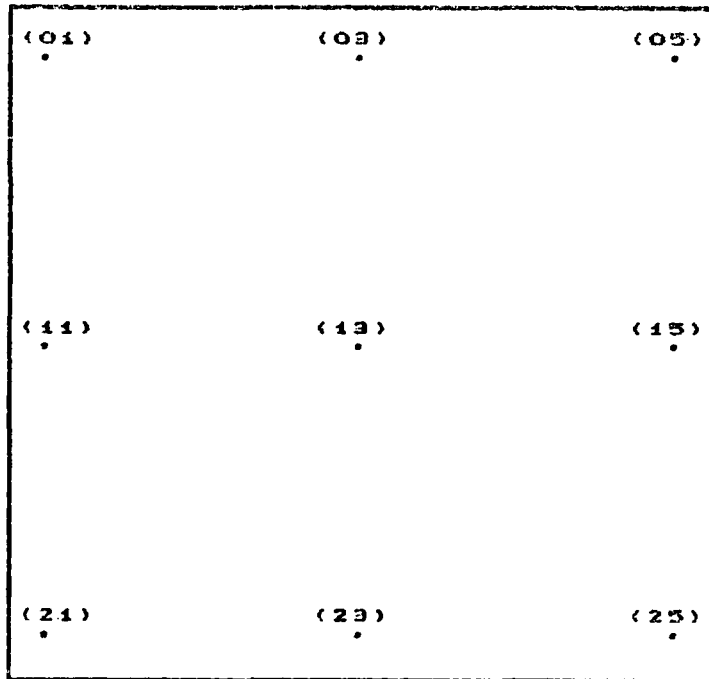


Figura 5.5 - Posição dos 09 pontos no triplete, representada na foto central.

O programa de fototriangulação em linha usa três fotos num ajustamento simultâneo (tripletos). A fim de verificar os programas (observações geradas) e o tempo de execução para cada configuração, (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5), vários testes foram efetuados e são apresentadas na tabela 5.01.

Tabela 5.01 - Tempo de execução para a formação do triplete isento de erros grosseiros contendo na 1<sup>a</sup> coluna a configuração, na 2<sup>a</sup> o tempo de execução e na 3<sup>a</sup> o  $\hat{\sigma}^2$  (variância de peso unitário a posteriori).

distribuição	tempo execução	$\hat{\sigma}^2$ ( $\sigma_0^2$ )
figura 3.5	03 <sup>min</sup> 19,61 <sup>s</sup>	$4,24 \times 10^{-9}$
figura 3.6	00 <sup>min</sup> 53,57 <sup>s</sup>	$7,36 \times 10^{-9}$
figura 3.7	01 <sup>min</sup> 10,82 <sup>s</sup>	$4,03 \times 10^{-9}$
figura 3.8	01 <sup>min</sup> 10,82 <sup>s</sup>	$6,06 \times 10^{-9}$
figura 3.9	00 <sup>min</sup> 30,93 <sup>s</sup>	$3,59 \times 10^{-9}$

#### 5.2.1. Depuração dos E.G. nas Marcas Fiduciais (teste 01)

Para as observações referentes às marcas fiduciais geradas, considerou-se a utilização de uma câmara e situação ideal, ou seja, isenta de todos erros sistemáticos.

O procedimento aqui adotado para depurar erros grosseiros nas marcas fiduciais é a verificação do resíduo de cada observação em relação à média, conforme descrito no item 3.3.1, pois considerou-se que no mínimo três observações de cada marca fiducial foram efetuadas. Abaixo será apresentado um quadro com o teste realizado numa foto, onde um erro de 0,025 mm foi introduzido em uma das coordenadas.

Tabela 5.02 - Coordenadas observadas das marcas fiduciais (3 séries) e com o erro médio quadrático dos desvios. Um erro de 0,025 mm na coordenada X do ponto 03 foi introduzido.

ponto	foto da esquerda			
	X (mm)	DX (mm)	Y (mm)	DY (mm)
01	440,553	0,0025	555,558	0,0041
	440,558		555,550	
	440,555		555,555	
02	555,550	0,0036	670,554	0,0043
	555,555		670,555	
	555,557		670,287	
03	670,532	0,0139	555,555	0,0026
	670,530		555,559	
	670,555		555,554	
04	555,552	0,0035	440,555	0,0053
	555,555		440,563	
	555,559		440,565	

Pode-se verificar, conforme a tabela 5.02, que o valor dado na terceira coluna do ponto 03 (marca fiducial) é maior que dos outros pontos, assim com um simples teste neste valor (Dx e Dy) pode-se detectar o erro grosseiro. O critério de rejeição adotado foi de 0,007 mm, valor este que corresponde a  $\sqrt{2} \times 0,005$  mm (0,005 mm valor adotado como desvio padrão das observações).

Para se depurar os erros grosseiros do tipo C e D assume-se que todos os erros grosseiros do tipo A já foram eliminados na etapa anterior. Agora através da transformação

isogonal aplicada a 3 marcas fiduciais, efetua-se a transformação isogonal no plano e calcula-se o resíduo na quarta marca fiducial. Repete-se este procedimento para as outras marcas fiduciais até que todas fiquem fora do ajustamento, conforme comentado no item 3.3.3.

Assim vários testes foram realizados dos quais somente um será apresentado, onde um erro de 0,025 mm foi introduzido nas coordenadas das marcas fiduciais.

Tabela 5.03 - Coordenadas das marcas fiduciais calibradas, observadas transformadas e os resíduos, com um erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada "x" observada do ponto 2.

pon- to	M. F. calibradas		M. F. obs. trans		resíduos	
	x(mm)	y(mm)	x(mm)	y(mm)	$\partial x$ (mm)	$\partial y$ (mm)
1	-115,000	0,000	-115,006	0,004	0,009	0,006
2 <sup>o</sup>	0,000	115,000	0,020	115,007	-0,018	-0,004
3	115,000	0,000	115,001	-0,004	0,012	-0,003
4	0,000	-115,000	0,002	-115,003	-0,009	-0,001

Pode-se verificar no quadro acima que o resíduo da coordenada do ponto 2 é maior do que os outros (0,018), valor este que é maior que o critério de rejeição<sup>8</sup> adotado, sendo

8 0,015 - valor adotado como critério de rejeição, calculado como três vezes o desvio padrão adotado para as observações.

que isto ocorreu em todos os pontos que foram testados, viabilizando-se assim o procedimento utilizado.

#### 5.2.2. Depuração dos E.G. do tipo A e C nas fotocoordenadas

##### (teste 02)

Os erros de grandes magnitudes, do tipo A, são depurados por comparação de coordenadas. Assim o primeiro erro a ser verificado é a coordenada do ponto que ultrapassa o valor limite (metade do quadro focal), conforme comentado no item 3.3.2.

Os erros grosseiros do tipo C nas coordenadas dos pontos de ligação entre os modelos são verificados por uma comparação entre as coordenadas lidas no modelo anterior com as atuais, estas discrepâncias serão comparadas com um valor pré-definido, no caso, três vezes o desvio padrão nominal do instrumento (0,003mm), conforme comentado no item 3.3.2.

Agora considera-se que os erros grosseiros do tipo A e parte do Tipo C já foram eliminados. Assim a depuração dos erros grosseiros do tipo C remanescentes é feita através da análise dos resíduos padronizados após o ajustamento, conforme comentado no item 3.3.4, um exemplo é dado na tabela 5.04 dentre vários testados da configuração definida pela figura 5.3.

Tabela 5.04 - Valores em módulo dos resíduos padronizados dos pontos da configuração dada pela figura 3.7, com erro de 0,10 mm na coordenada Y do ponto 06.

ponto	resíduo padronizado das coordenadas Y		
	foto i	foto i+1	foto i+2
01	4,20	4,20	--
03	3,84	3,64	3,84
05	--	4,00	4,00
06*	3,80	3,80	--
08	3,80	3,60	3,80
10	--	3,70	3,70
11	3,50	3,50	--
13	2,40	2,20	2,40
15	--	3,50	3,50
16	3,80	3,80	--
18	2,70	2,50	2,70
20	--	3,70	3,70
21	4,20	4,20	--
23	3,84	3,64	3,84
25	--	4,00	4,00

O procedimento de simples análise do resíduo padronizado após o ajustamento não foi capaz de detectar erros grosseiros desta magnitude ( $\cong 20 \times \hat{\sigma}$ ), pois conforme a tabela, pode-se verificar que o ponto 01 e 21 tem o resíduo padronizado maior que o do ponto 06.



### 5.2.3. Depuração dos E.G. do tipo D (teste 03)

Na determinação dos erros grosseiros do tipo D utilizou-se de dois modelos matemáticos: "Danish Method" onde o peso é alterado a cada iteração do ajustamento e "Data Snooping" onde calculou-se a diagonal da matriz  $q_{vv}$ , conforme comentado no item 3.3.5.

A constante "k" da função peso do "Danish Method", quando adotada fixa para todas as observações do triplete, não deu resultados aceitáveis na depuração de erros grosseiros do tipo D.

Com isto procurou-se determinar valores diferenciados para cada posição do ponto, onde os valores foram calculados considerando-se a direção X e Y (geometria) e diferentes quantidade de raios que definem o ponto. Assim, estes valores da constante "k" são definidos, para a posição, em função das coordenadas X e Y do ponto (no programa) e com diferentes valores quando definidos por 2 ou 3 raios, obtendo-se assim os valores apresentados pelas equações 5.01, 5.02, 5.03 e 5.04.

Os valores de "Kx" são definidos pela equação 5.01, somente para pontos definidos por três raios.

$$Kx = 1,800 + Cx \quad (5.01)$$

onde os valores de Cx são:

$$00,0 \text{ mm} \leq Y < 10,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,000,$$

$$10,0 \text{ mm} \leq Y < 25,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,040,$$

$$25,0 \text{ mm} \leq Y < 40,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,060,$$

$$40,0 \text{ mm} \leq Y < 55,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,280,$$

$$55,0 \text{ mm} \leq Y < 70,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,282,$$

$$70,0 \text{ mm} \leq Y < 85,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,284,$$

$$85,0 \text{ mm} \leq Y < 100,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,286$$

e

$$Y \geq 100,0 \text{ mm} \rightarrow Cx = 0,288.$$

Nas equações 5.01 são ilustrados somente os valores de "Kx" dos pontos definidos por três raios (pontos de ligação de modelos) , pois os outros pontos teriam o valor nulo.

Para o valor de "Ky" várias considerações devem ser feitas:

a ) considerando a "acelerador" Ky = 3,5 e alterando-se o seu valor conforme a sua posição na direção X.

$$K'_y = Ky - C'_y, \quad (5.02)$$

com,

$$0,0 \text{ mm} \leq X < 10,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 0,0,$$

$$10,0 \text{ mm} \leq X < 20,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 0,4,$$

$$20,0 \text{ mm} \leq X < 30,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 0,5,$$

$$30,0 \text{ mm} \leq X < 40,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 0,7,$$

$$40,0 \text{ mm} \leq X < 50,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 1,4,$$

$$50,0 \text{ mm} \leq X < 60,0 \text{ mm} \rightarrow C'_y = 0,7,$$

$$60,0 \text{ mm} \leq X < 70,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,5,$$

e

$$70,0 \text{ mm} \leq X < 80,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,4,$$

b ) considerando acelerador "Ky" para pontos definidos por três raios (pontos de ligação), em função da coordenada Y do ponto.

$$K_y'' = K_y' - C_y' \quad (5.03)$$

com,

$$00,0 \text{ mm} \leq Y < 10,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,000,$$

$$10,0 \text{ mm} \leq Y < 25,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,200,$$

$$25,0 \text{ mm} \leq Y < 40,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,300,$$

$$40,0 \text{ mm} \leq Y < 55,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 1,400,$$

$$55,0 \text{ mm} \leq Y < 70,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 1,410,$$

$$70,0 \text{ mm} \leq Y < 85,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 1,420,$$

$$85,0 \text{ mm} \leq Y < 100,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 1,430$$

e

$$Y \geq 100,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 1,440.$$

E ainda para estes pontos definidos por três raios, faz-se a seguinte consideração.

$$K_y''' = K_y'' - 1,300, \text{ para pontos situados na foto central ou}$$

$$K_y''' = K_y'' - 1,100, \text{ para pontos situados na foto da direita e da esquerda.}$$

c ) considerando acelerador " $K_y$ " para pontos definidos por dois raios, em função da coordenada Y do ponto.

$$K_y' = K_y - (C_y' \text{ ou } C_y'') \quad (5.04)$$

com,

$$00,0 \text{ mm} \leq Y < 20,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,000 \text{ ou } C_y'' = 0,000,$$

$$20,0 \text{ mm} \leq Y < 35,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,200 \text{ ou } C_y'' = 0,100,$$

$$35,0 \text{ mm} \leq Y < 50,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,300 \text{ ou } C_y'' = 0,200,$$

$$50,0 \text{ mm} \leq Y < 60,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,400 \text{ ou } C_y'' = 0,300,$$

$$60,0 \text{ mm} \leq Y < 70,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,600 \text{ ou } C_y'' = 0,400,$$

e

$$Y \geq 70,0 \text{ mm} \rightarrow C_y' = 0,700 \text{ ou } C_y'' = 0,500.$$

sendo que  $C_y'$  será utilizado somente nos pontos do modelo da esquerda e  $C_y''$  será utilizado nos pontos da direita.

As equações 5.02, 5.03 e 5.04 representam os valores de " $K_y$ " do triplete, determinados em função da foto, número de raios, posição na direção "x" e posição na direção "y" do ponto.

Com estes valores da constante "k", testes nas distribuições citadas no item 5.2.1 foram realizados, onde erros de 0,020 mm foram introduzidos nas observação. Obtendo-se assim uma boa eficiência na detecção nas distribuições dadas pelas figuras 5.1, 5.2 e 5.3. Na distribuição dada pela figura 5.4 o teste teve uma eficiência parcial, pois detectou, além dos pontos com erros grosseiros

outros pontos que não tinham erros. Na distribuição dada pela figura 5.5 o teste não foi eficiente, não conseguindo detectar os erros grosseiros introduzidos nos pontos. Após vários testes, um exemplo é ilustrado na tabela 5.07.

Tabela 5.05 - Resíduos e pesos do pontos das coordenadas "y" (com erro de 0,020 mm no ponto 11), obtidas pelo ajustamento com Estimativa Robusta e com "K" ponderado, aplicada a configuração dada na figura 5.2.

ponto	resíduos nas coord. Y( $\mu$ m)			pesos das coord. Y		
	foto i	foto i+1	foto i+2	foto i	foto i+1	foto i+2
01	-0,358	0,381	--	1,000	1,000	--
02	-0,595	0,648	--	1,000	1,000	--
03	-0,480	0,313	0,168	1,000	1,000	1,000
04	--	-0,732	0,725	--	1,000	1,000
05	--	0,000	-0,015	--	1,000	1,000
11*	7,240	-0,758	--	0,480	0,406	--
12	-2,515	0,259	--	0,997	0,997	--
13	-3,488	1,019	2,524	0,994	1,000	0,998
14	--	0,693	-0,726	--	1,000	1,000
15	--	-0,780	0,845	--	1,000	1,000
21	-0,931	0,938	--	1,000	1,000	--
22	0,481	-0,481	--	1,000	1,000	--
23	0,801	-0,229	-0,595	1,000	1,000	1,000
24	--	-0,274	0,296	--	1,000	1,000
25	--	-0,336	0,343	--	1,000	1,000

Tabela 5.06 - Resíduos e pesos das coordenadas "X" dos pontos, obtidos da aplicação da Estimativa Robusta onde um erro de 0,020 mm foi introduzido na coordenada Y da foto (i+1) no ponto 03, aplicada na configuração dada na figura 5.3.

ponto	resíduos nas coord. X ( $\mu\text{m}$ )			pesos das coord. X		
	foto i	foto i+1	foto i+2	foto i	foto i+1	foto i+2
03*	0,001	-0,006	0,001	0,963	0,000	0,957
08	-0,001	0,001	0,000	0,998	0,963	0,998
13	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000
18	0,000	0,000	0,000	1,000	0,998	1,000
23	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000

Pelos dados das tabelas 5.05 e 5.06 pode-se verificar que o ponto onde um erro foi introduzido, o resíduo é maior e o peso é menor, configurando-se assim a eficiência do modelo adotado.

Com o modelo matemático "Data Snooping", os testes foram realizados usando-se o procedimento descrito no item 3.3.5. Nas distribuições dadas pelas figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 o modelo adotado mostrou-se eficiente. Na distribuição dada pela figura 5.5 o teste não foi eficiente, não conseguindo detectar erros grosseiros do tipo D introduzidos nos pontos. Vários testes foram realizados, um exemplo será ilustrado na tabela 5.07.

Tabela 5.07 - Valor do residuo padronizado, obtidas após o ajustamento com "Data Snooping" modificado, com erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada Y do ponto 11 na fot i, na distribuição dada pela figura 5.2.

ponto	residuo padronizado coordenada "Y"		
	foto i	foto i+1	foto i+2
01	-0,23	0,18	--
02	-0,47	0,45	--
03	1,38	-0,74	-0,53
04	--	-0,53	0,57
05	--	0,15	-0,11
11*	4,86	-4,87	--
12	-1,05	1,03	--
13	0,28	-0,09	-0,21
14	--	0,01	-0,02
15	--	0,09	-0,11
21	-0,91	0,91	--
22	0,16	-0,21	--
23	1,45	-0,47	-0,69
24	---	-0,29	0,28
25	--	-0,18	0,20

Tabela 5.08 - Valor do residuo padronizado, obtidas após o ajustamento com "Data Snooping" modificado, com erro grosseiro de 0,020 mm na coordenada X do ponto 03 da foto (i+1), na distribuição dada pela figura 5.2.

ponto	residuo padronizado coordenada "X"		
	foto i	foto i+1	foto i+2
03	4,95	-5,01	4,91
13	-1,03	1,10	-1,02
23	-0,52	0,49	-0,55

Nas tabelas 5.07 e 5.08 verificam-se que os resíduos padronizado dos pontos 11 e 03 são maiores que os outros, assim pode-se verificar que este modelo ("Data Snooping") é capaz de detectar erros grosseiros do tipo D, quando ocorre apenas um erro grosseiro nas observações.

#### 5.2.4. Depuração dos E.G. tipo D em mais de uma observação

##### (teste 04)

Erros grosseiros foram introduzidos em mais de uma observação (duas). Os testes foram realizados nas distribuições dadas (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5), somente com a Estimativa Robusta. Verificou-se que o modelo matemático adotado (Estimativa Robusta) não é capaz de detectar erros grosseiros em dois pontos, quando eles estão próximos (um quarto da base), mas para os pontos distanciados de mais de um



quarto da base eles eram detectados, conforme um exemplo abaixo tabelado.

Tabela 5.09 - Resíduos e pesos das coordenadas Y, obtidas após o ajustamento com Estimativa Robusta, na configuração dada pela figura 5.2, com erro grosseiro de 0,020 mm nas coordenadas dos pontos 01 e 21 da foto 1.

ponto	resíduos nas coord. Y( $\mu$ m)			pesos das coord. Y		
	foto i	foto i+1	foto i+2	foto i	foto i+1	foto i+2
01*	6,706	-7,431	--	0,499	0,336	--
02	-2,617	2,678	--	0,995	0,998	--
03	-2,304	1,549	0,785	0,996	0,999	1,000
04	--	-0,153	0,183	--	1,000	1,000
05	--	1,076	-1,030	--	1,000	1,000
11	-1,894	1,955	--	1,000	0,999	--
12	-0,439	0,476	--	1,000	1,000	--
13	-2,347	-0,200	2,609	0,999	1,000	0,999
14	--	0,000	-0,005	--	1,000	1,000
15	--	-0,864	0,899	--	1,000	1,000
21*	6,416	-6,516	--	0,565	0,543	--
22	-2,327	2,357	--	0,997	0,997	--
23	-0,458	0,152	0,320	1,000	1,000	1,000
24	--	0,473	-0,526	--	1,000	1,000
25	--	0,702	-0,725	--	1,000	1,000

A tabela 5.09 ilustra que os resíduos dos pontos 01 e 21 são maiores que os outros e que seus pesos são pequenos, pois os pontos estão nos extremos opostos, que pode ser verificado na figura 5.2., assim o modelo matemático adotado (Estimativa Robusta) foi capaz de detectar mais de um grosseiro do tipo D.

#### 5.2.5. Depuração dos E.G. nos pontos de enlace (teste 05)

Os dados gerados pelo programa de fototriangulação em linha, que são as coordenadas tridimensionais dos pontos observados isentas dos erros sistemáticos, servem agora como dados de entrada para o programa de concatenação das faixas. Com estes dados foi feita a seguinte experiência (teste -05) nas configurações dadas pelas figuras 5.6 a 5.7.:

teste 05 - depuração de erros grosseiros nos pontos (enlace) de ligação entre as faixas.

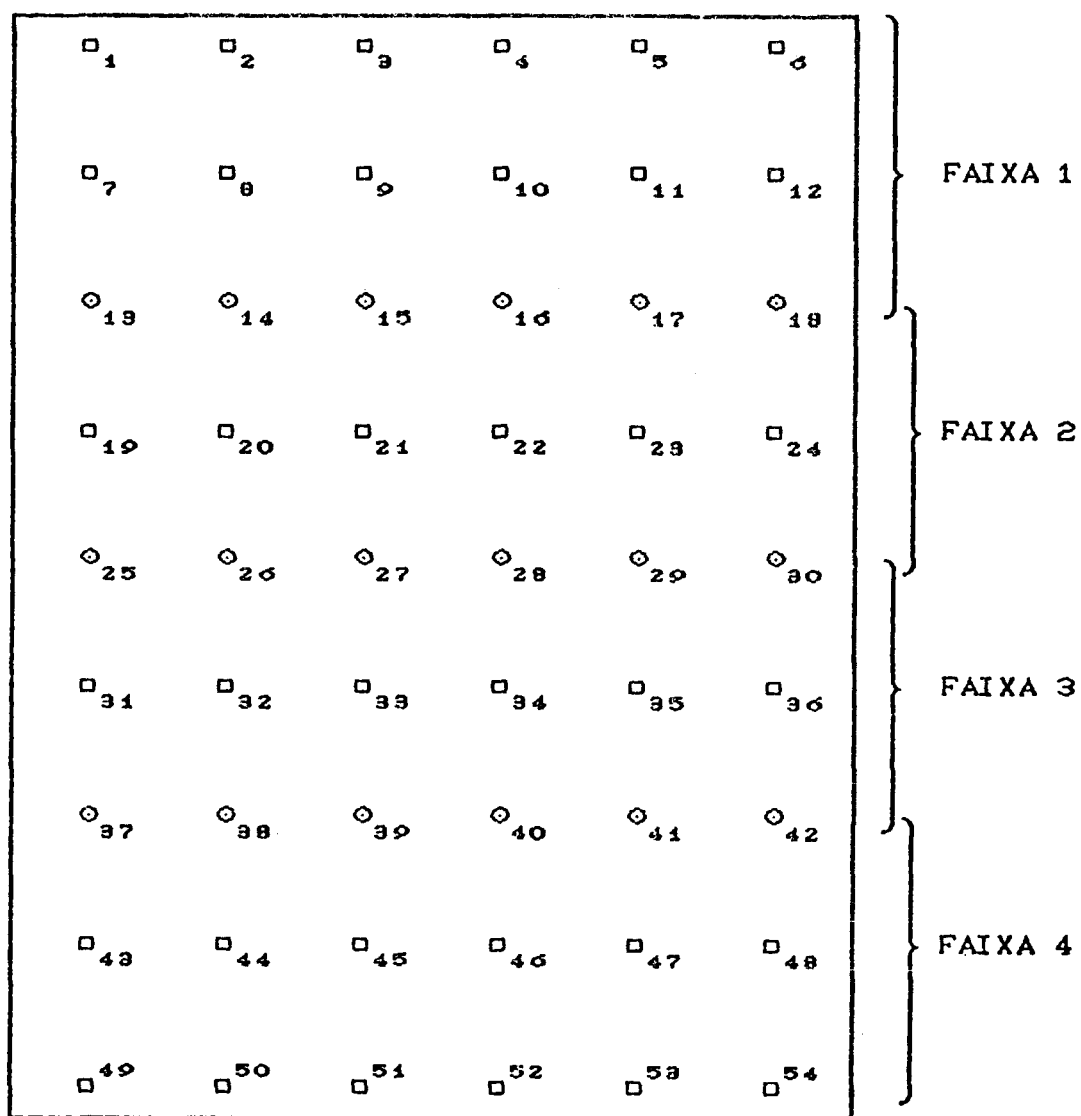


Figura 5.6 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixa com pontos de enlace alinhados

onde :

○ são os pontos de enlace e

□ são os pontos de ligação.

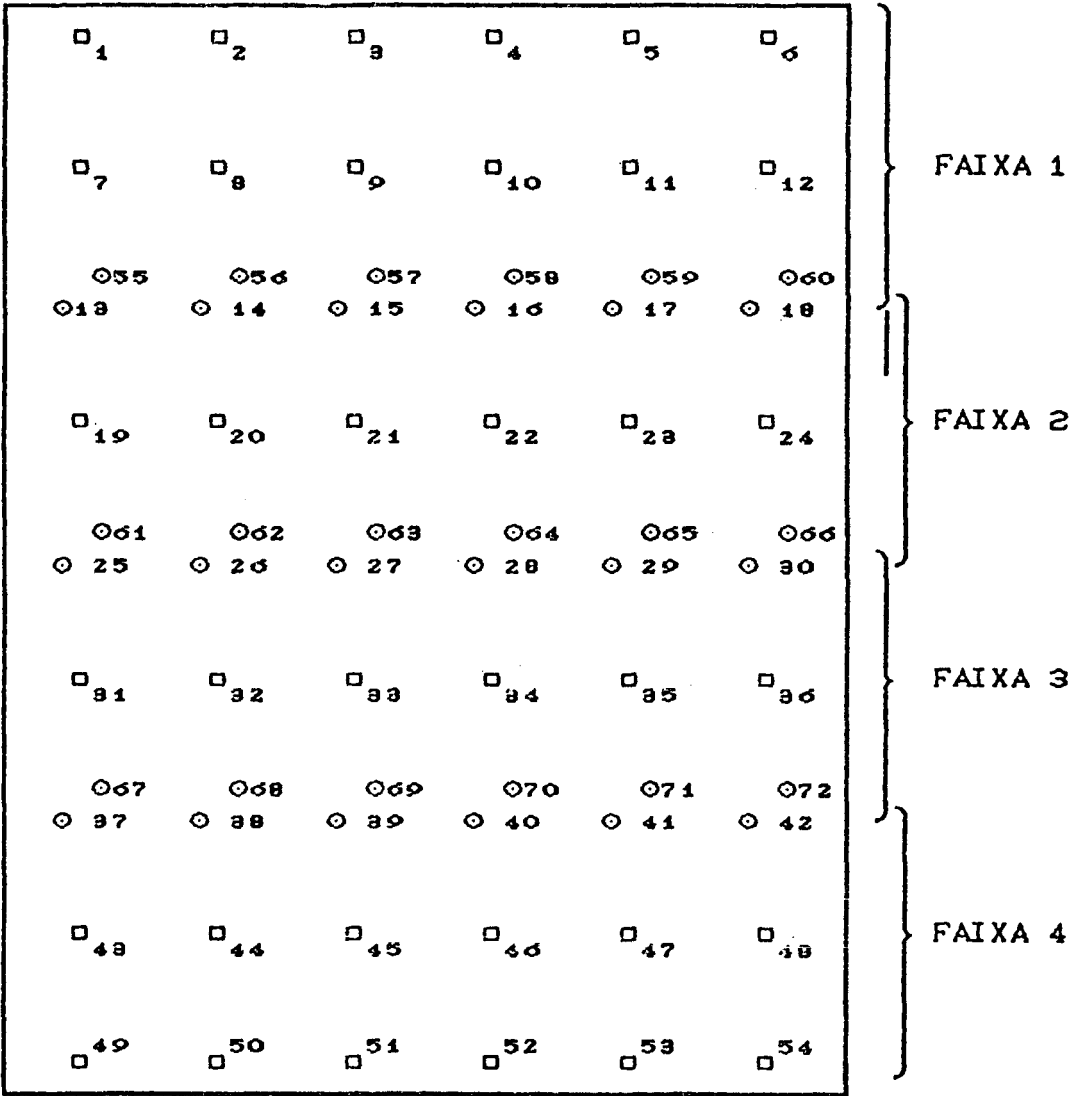


Figura 5.7 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixa com pontos de enlace não alinhados

Para se verificar a eficiência deste procedimento de depuração de erros grosseiros (tipo C e D), introduziram-se erros grosseiros de 0,020 mm nas coordenadas dos pontos de enlace nas configurações dadas pelas figuras 5.6 e 5.7). Vários testes foram realizados (conforme item 4.4), dos quais a tabela 5.10 representa um deles.

Tabela 5.10 - Resíduos dos pontos de ligação entre as faixas 1 e 2 da distribuição dada pela figura 5.7, com erro grosseiro na coordena X do ponto 15 de 0,025 mm.

ponto	resíduos nas coordenadas		
	X mm	Y mm	Z mm
13	0,0003	0,0032	0,603
55	0,0004	0,0053	0,274
14	0,0066	0,0045	0,830
56	0,0008	0,0003	0,082
15*	0,0195	0,0004	0,379
57	0,0130	0,0046	1,416
16	0,0041	0,0000	0,356
58	0,0054	0,0043	0,560
17	0,0018	0,0091	1,196
59	0,0000	0,0131	0,177
18	0,0035	0,0009	1,063
60	0,0080	0,0011	0,830

O ponto 15 foi detectado e eliminado do bloco, pois o valor adotado para a máxima discrepância aceitável foi de 0,015 mm.

Conforme a tabela 5.10 e vários outros testes que foram efetuados mostraram-se eficientes nas coordenadas planimétricas, pois em todos os pontos de ligação da distribuição dada pela figura 5.7, das quais os erros grosseiros introduzidos foram detectados.

Na distribuição dada na figura 5.7, o procedimento não foi capaz de detectar erros grosseiros do tipo C e D. Isto pode ser justificado pela distribuição dos pontos (alinhados), comprometendo assim a "geometria ", quando da utilização do modelo matemático na depuração dos erros grosseiros.

A depuração de erros grosseiros nas coordenadas altimétricas não foi eficaz, talvez devido ao próprio procedimento utilizado (fototriangulação sequencial).

#### 5.2.6. Depuração dos E.G. do tipo B, C e D nos pontos de controle (teste 06)

A fim de verificar vários modelos matemáticos adotados na depuração dos erros grosseiros (B, C e D) nos pontos de controle, desenvolveram-se programas de concatenação de faixas e transformação do bloco (formado nesta concatenação no sistema arbitrário) para o sistema dos pontos de controle. Assim, fizeram-se várias experiências nas configurações 5.8, 5.9, 5.10, denominadas de:

- teste 06 - depuração de erros grosseiros do tipo B, C e D nos pontos de controle.

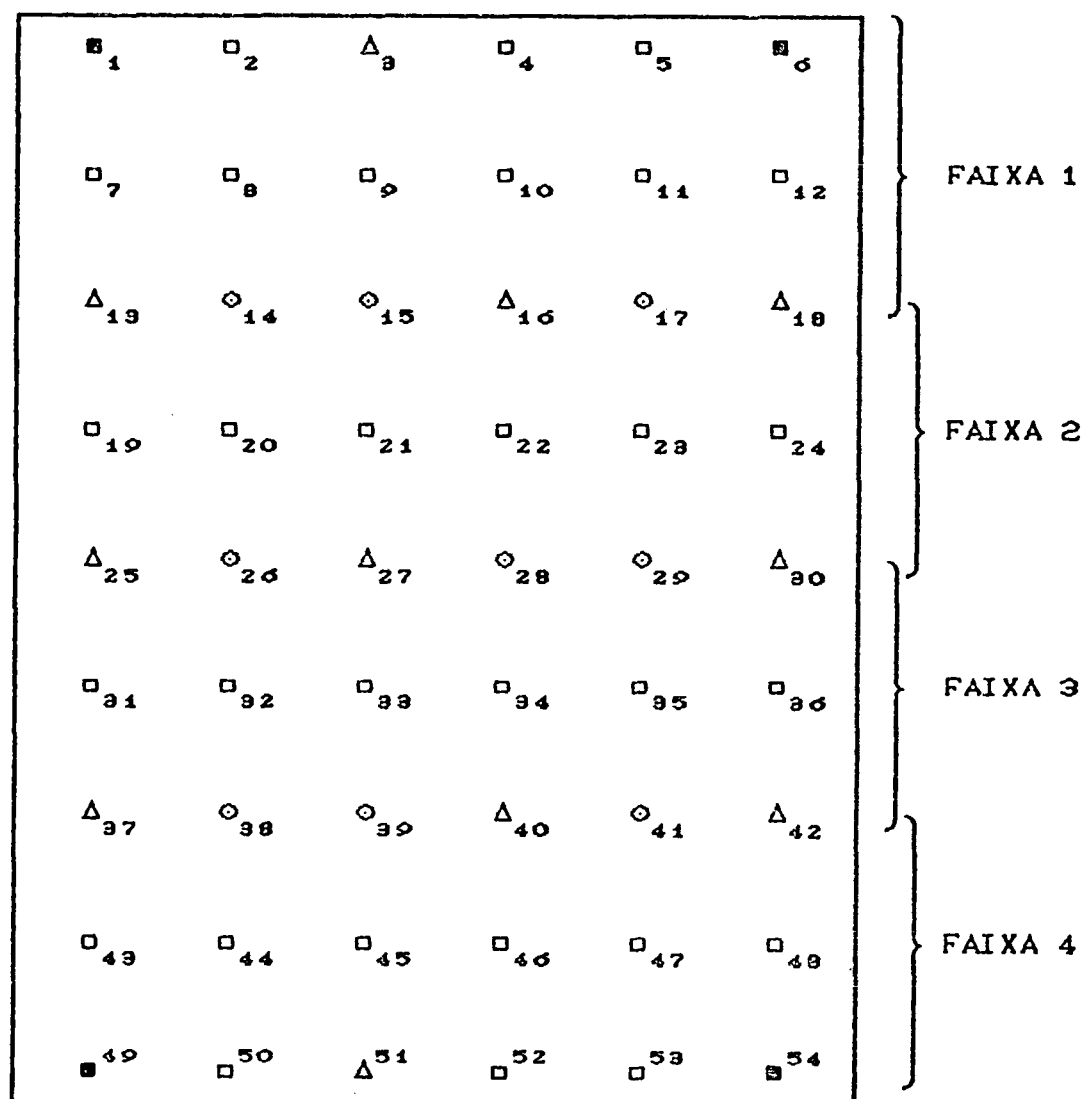


Figura 5.8 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixas com pontos de controle planialtimétricos nos cantos e altimétrico espaçados de no máximo duas bases.

- $\Delta$  → pontos de controle altimétrico
- $\blacksquare$  → pontos de controle planialtimétrico
- $\square$  → pontos fototriangulados
- $\circ$  → pontos de ligação entre as faixas

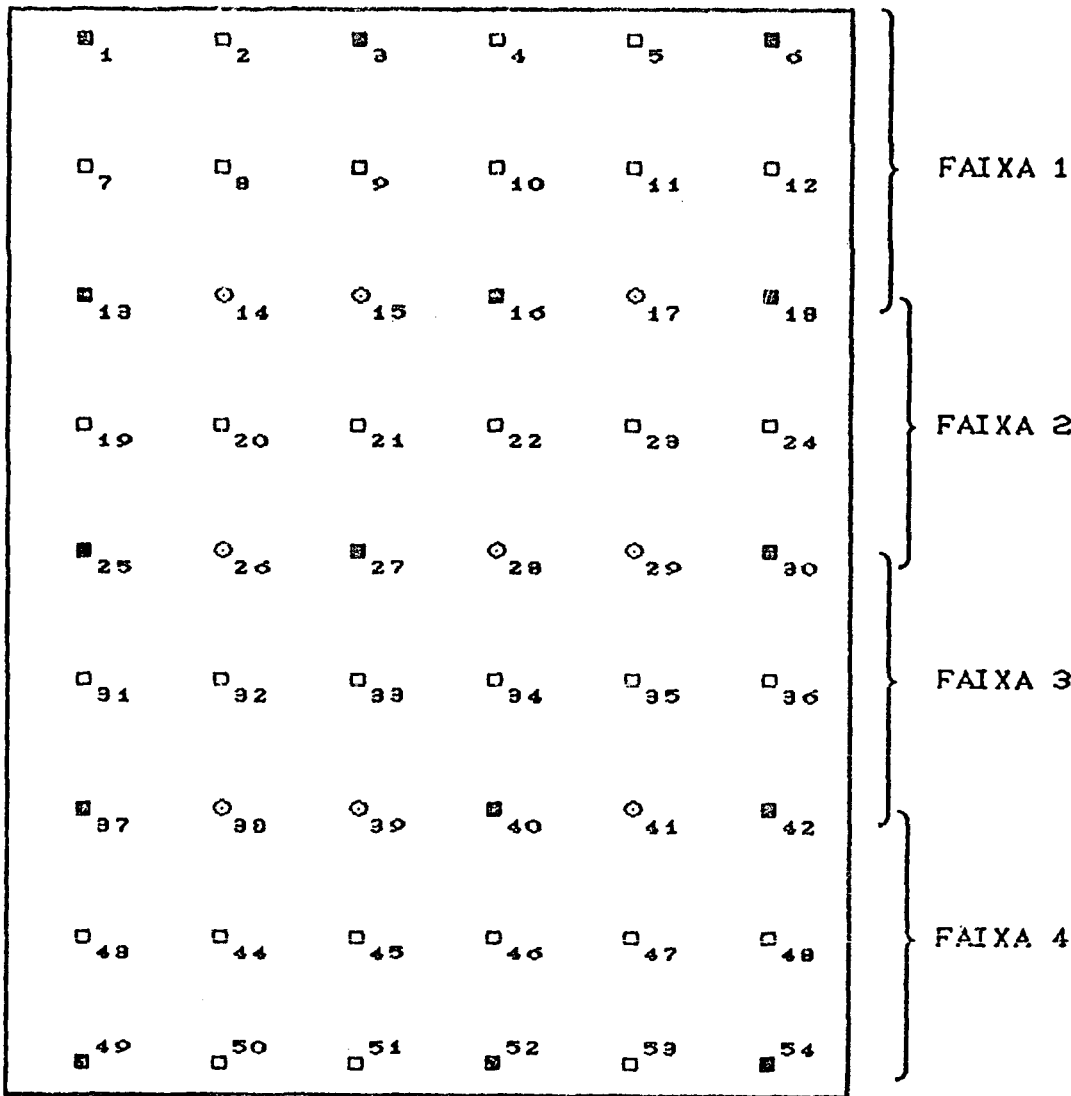


Figura 5.9 - Bloco com 4 faixas e 6 fotos por faixa com pontos de controle nos extremos e no meio das faixas.

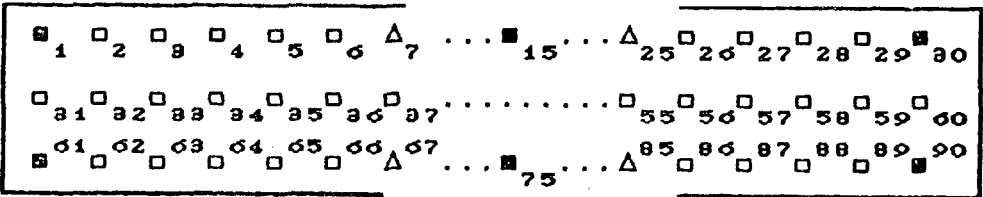


Figura 5.10 - Bloco com uma faixa de 30 fotos, com pontos de controle distribuidos a cada 5 bases.



Para esta experiência vários modelos matemáticos de transformações de sistemas foram programados.

Com os programas citados na tabela 4.1, vários testes foram realizados a fim de verificar a configuração e o melhor modelo matemático, conforme comentado no item 4.2, nas distribuições dadas nas figuras 5.8, 5.9 e 5.10.

Após os testes verificou-se que a configuração dada pela figura 4.5 fornece melhores resultados, isto já era esperado, pela maior quantidade de pontos de controle no bloco.

Analisando os testes realizados , verificou-se que os programas 02 e 04 forneceram melhores resultados das coordenadas no sistema do controle , quando existem mais de uma faixa no bloco. Os programas 03 e 05 forneceram melhores resultados quando existe uma faixa no bloco fototriangulado.

Na depuração dos erros grosseiros dos tipos B, C e D (teste 06) , o procedimento adotado foi sequencial. Na primeira etapa dos testes, foi realizada a depuração de erros grosseiros do tipo B nos pontos de controle , usando-se do modelo matemático citado no item 4.5.

Através dos testes (tabela 5.12) realizados pode-se verificar que quase todos os pontos com erros grosseiros do tipo B foram detectados em planimetria; em alguns casos, pontos que não tinham erro foram apontados como contaminados.

Os erros grosseiros do tipo B introduzidos nas coordenadas altimétricas não foram detectados, pois durante os testes verificou-se que o bloco tinha um comportamento irregular, comportamento este que depende da distribuição e do

número de pontos controle utilizado, inviabilizando assim o procedimento de detecção dos erros grosseiros nos pontos altimétricos.

O valor de 2,0m para o critério de convergência foi determinado, através de vários testes realizados, verificou-se que é possível detectar erros grosseiros de 1,0 m (E.G. do tipo B). A seguir será dado um exemplo dos testes realizados.

Tabela 5.11 - Resíduos das coordenadas dos pontos, com erro grosseiro de 1,00 m na coordenada X de terreno do ponto 49.

ponto	resíduos nas coordenadas		
	X(m)	Y(m)	Z(m)
01	1,522	0,037	0,087
05	1,496	0,022	8,539
06	0,000	0,000	17,938
13	1,580	0,063	0,000
14	1,693	0,082	0,158
58	0,208	0,132	0,352
18	0,198	0,219	17,684
22	0,884	0,230	0,442
33	0,674	0,346	0,053
42	1,078	0,448	17,791
43	0,105	0,134	0,568
49*	2,775	0,017	0,552
50	0,000	0,000	9,025
53	0,464	0,118	18,677
54	0,144	0,134	12,270

No caso acima, o ponto 49 foi detectado, pois o valor adotado como máxima discrepância foi de 2,0 metros nas coordenadas planimétricas, como já comentado, este valor foi determinado através de testes.

A seguir os pontos de controle foram depurados dos erros grosseiros (C e D) tendo como modelo matemático a

transformação isogonal tridimensional e Estimativa Robusta ( $k = 1$ ).

Os algoritmos para depurar erros grosseiros do tipo C e D nos pontos de controle não se mostraram eficientes, pois não foram capazes de detectar erros grosseiros de 0,5 m. nas configurações testadas. Abaixo está um dos exemplos dos testes realizados.

Tabela 5.12 - Relação dos resíduos dos pontos onde um erro grosseiro de 0,50 m na coordenada Y do ponto 49 foi introduzido.

ponto	resíduos nas coordenadas		
	X(m)	Y(m)	Z(m)
01	0,485	0,067	1,776
05	0,851	0,151	1,561
06	-0,669	0,168	0,204
13	0,577	-0,024	1,961
14	0,800	0,006	-1,972
58	-1,155	0,043	-5,243
18	-0,858	0,183	0,496
22	0,133	0,082	2,677
33	-0,155	-0,015	-5,941
42	0,579	0,054	0,589
43	-0,938	-0,204	1,881
49*	1,880	-0,221	2,045
50	-0,947	-0,214	-1,948
53	-0,160	-0,056	1,578
54	-0,407	-0,229	0,235

A tabela 5.12 mostra que o modelo matemático não foi capaz de detectar este tipo de E.G. (tipo C), que pode ser explicado pela sua magnitude ser próxima do erro sistemático ocorrido na concatenação das faixas e da transformação deste (bloco) para o terreno. Assim na maioria dos casos o erro não foi detectado, tendo um comportamento diferenciado para cada

teste efetuado.

### 5.3. Fototriangulação simultânea com análise dos resultados

A fim de verificar a capacidade computacional, tempo de processamento e a influência dos erros grosseiros nos resultados, efetuou-se vários testes com o programa de fototriangulação simultânea com feixes de raios perspectivos (FTCHO).

Para verificar o programa FTCHO, usou-se de uma distribuição com 10 fotos e 30 pontos em uma faixa, na escala de 1/5000 e distância focal de 200 mm. Com estes dados vários testes foram realizados:

- a ) teste 07 - execução do programa sem erros grosseiros, com parâmetros aproximados gerados pelos programas anteriores (fototriangulação sequencial);
- b ) teste 08 - execução do programa com parâmetros aproximados obtidos em uma carta na escala 1/25000, considerando um erro médio de  $\pm 0,2$  mm na escala da carta,
- c ) teste 09 - execução do programa com parâmetros aproximados gerados por um pré-processamento, e as observações com um erro de 0,020 mm em duas fotocoordenadas,
- d ) teste 10 - execução do programa com parâmetros aproximados gerados por um pré-processamento, e as observações com um erro de 0,100 mm em uma fotocoordenada e
- e ) teste 11 - execução do programa com parâmetros aproximados gerados por um pré-processamento, e as observações com um erro de 0,150 mm em duas fotocoordenadas.

Tabela 5.13 - Tempo de execução,  $\hat{\sigma}_0$ , número de iterações e a máxima discrepância geradas pelo programa FTCHO.

teste	tempo de exe.	$\hat{\sigma}_0$	iter.	máxima discrepância (m)		
(07)	05 <sup>min</sup> 43,35 <sup>s</sup>	0,0030	02	0,034	0,034	0,053
(08)	08 <sup>min</sup> 30,98 <sup>s</sup>	0,0012	03	0,035	0,034	0,053
(09)	08 <sup>min</sup> 30,98 <sup>s</sup>	0,0016	03	0,088	0,096	0,073
(10)	08 <sup>min</sup> 30,98 <sup>s</sup>	0,0048	03	0,260	0,271	0,323
(11)	08 <sup>min</sup> 31,15 <sup>s</sup>	0,0069	03	0,388	0,406	0,484

Analisando-se a tabela 5.13, pode-se dizer que os erros grosseiros numa fototriangulação simultânea não é detectado por uma simples análise da unidade de variância "a posteriori".

## CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

### 6.1. Introdução

A análise dos resultados obtidos no capítulo anterior, permitem algumas conclusões e recomendações, que serão comentadas por etapas.

### 6.2. Conclusões

A depuração de erros grosseiros numa fototriangulação é muito importante, pois a confiabilidade dos resultados depende da qualidade das observações.

A fototriangulação "on-line" com depuração de erros grosseiros torna este procedimento (depuração de erros grosseiros) mais eficaz, pois os dados são depurados na medida em que são observadas, podendo aqui ser aplicado o procedimento da filtragem progressiva.

A Estimativa Robusta utilizada na depuração de erros grosseiros se mostrou eficiente, quando utilizada com "aceleradores variáveis" (ver item 5.2.3), calculado em função da posição do ponto na fotografia e pela quantidade de raios que definem o ponto.

O "Data Snooping" modificado utilizado na depuração de erros grosseiros nas observações se mostrou eficiente, depurando quase todos os erros que foram introduzidos nos testes.

A grande vantagem da utilização do triplete foi na depuração dos E.G. nas coordenadas "x" dos pontos de ligação dos modelos, pois E.G. do tipo D foram detectados.

A fototriangulação simultânea mostrou-se mais eficiente quando os dados são depurados dos erros grosseiros, fornecendo valores mais confiáveis, conforme as máximas



discrepâncias mostradas nos testes do capítulo 05.

### 6.3. Recomendações

Os testes foram realizados com dados fictícios, problema este que pode ter mascarado muitos erros (aleatórios) que poderiam ocorrer nas observações. E ainda, os testes se limitaram a poucas configurações dos pontos e em uma única escala.

Mais testes e otimizações poderiam ser realizados nestes programas (fototriangulação em linha e simultânea), visando: diminuir o tempo de execução, uma melhor distribuição dos pontos no modelo e/ou triplete e uma melhor distribuição dos pontos de controle e fototriangulados; também teste práticos e o aprimoramento para ambiente de produção deveriam ser realizados.

## APÊNDICE - A

### Erros Sistemáticos

#### A.1. Introdução

As imagens a serem observadas nos comparadores ou nos restituidores analíticos possuem erros que não poderiam ser eliminados mas que, com o conhecimento das possíveis causas podem ser modelados matematicamente ou parcialmente corrigidos. Também as observações executadas nos instrumentos fotogramétricos estão num sistema arbitrário, sistema da máquina, necessitando uma transformação deste sistema para o sistema de coordenadas fotográficas do modelo.

#### A.2. Transformação Afim

A transformação afim com seis parâmetros é a que modela mais aceitavelmente o trabalho do filme, dando melhores resultados, segundo [02] p. 17.

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y + \Delta x \\ y' &= c x + d y + \Delta y \end{aligned} \tag{A.1}$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

onde:

$a, b, c, d, \Delta x, \Delta y$  são os parâmetros de transformação a determinar,

$x', y'$  são as coordenadas das marcas fiduciais observadas e

$x$ ,  $y$  são as coordenadas das marcas fiduciais calibradas.

As matrizes  $A$  e  $N$  e o vetor  $U$  terão os seguintes padrões:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & x_n & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$N = \begin{bmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i & \vdots & & \\ & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i & \vdots & & 0 \\ \text{simétrica} & & n & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ & & & \vdots & & \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i \\ 0 & & & \vdots & \text{simétrica} & & n \end{bmatrix}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$N = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \sum x_i x'_i \\ \sum y_i x'_i \\ \sum x_i^2 \\ \sum x_i y'_i \\ \sum y_i y'_i \\ \sum y_i^2 \end{bmatrix} \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

Desenvolvendo-se o sistema de equações normais, aplica-se a transformação inversa (A.3), em todos os pontos observados na foto, após esta transformação, as coordenadas dos pontos estarão no sistema fiducial e corrigidas das deformações.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' - \Delta x \\ y' - \Delta y \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

### A.3. Redução ao sistema fotogramétrico

A posição do ponto principal com respeito ao sistema fiducial deverá ser conhecida, geralmente fornecida pelo certificado de calibração da câmara, esta correção é efetuada através de uma translação  $(x_0, y_0)$ , admitindo-se o paralelismo dos sistemas fiducial e fotogramétrico. A equação A.4, escrita abaixo, formula esta correção.

$$\begin{aligned} x &= x' - x_0 \\ y &= y' - y_0 \end{aligned} \quad (A.4)$$

onde,

$x, y$  são as coordenadas no sistema fotogramétrico,

$x'$ ,  $y'$  são as coordenadas no sistema fiducial e

$x_0$ ,  $y_0$  são as coordenadas do ponto principal referenciado ao sistema fiducial.

#### A.4. Distorções das lentes

Ao atravessar um sistema de lentes, um raio sofre uma série de desvios, provocando um deslocamento indesejável na imagem. Desta a distorção radial poderia ser corrigida na constante da câmara ( $c_k$ ) ponto a ponto (variando-se o  $c_k$ ), mas como na fotogrametria trabalha-se com as coordenadas imagens, faz-se as correções nas coordenadas, adotando-se um valor fixo para a constante da câmara (distância focal calibrada  $c_k$ ).

As distorções das lentes objetivas são causadas principalmente por dois defeitos óticos, encontrado na maioria dos sistemas de lentes. O primeiro defeito causa as aberrações definidas por Seidel, e o segundo provoca a distorção descentrada.

##### A.4.1. Distorção Radial

A distorção radial simétrica pode ser encarada como sendo a componente radial indesejável da refração sofrida por um raio de luz ao atravessar uma lente ou um sistema de lentes.

As coordenadas afetadas da distorção radial ( $x'$ ,  $y'$ ), são corrigidas pelo modelo desenvolvido por Conrady (1929).

$$x = x' - dx$$

$$y = y' - dy$$

$$dx = (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) x'$$

(A.5)

$$dy = (K_1 r^2 + K_2 r^4 + K_3 r^6) y'$$

e

$$r^2 = x'^2 + y'^2 \quad (A.6)$$

onde:

$K_1, K_2, K_3$  são os parâmetros calibradores da câmara

#### A.4.2. Distorção Descentrada

É um deslocamento da imagem provocada pela impossibilidade do fabricante em alinhar perfeitamente os eixos óticos das lentes que compõe uma objetiva, resultando numa série de distúrbios na imagem.

As coordenadas afetadas da distorção descentrada  $(x', y')$ , são corrigidas pelo modelo matemático desenvolvido por Conrady e modificado por Brow.

$$\begin{aligned} x &= x' - dx' \\ y &= y' - dy' \\ dx' &= P_1(r^2 + 2x'^2) + 2P_2x'y' \\ dy' &= 2P_1x'y' + P_2(r^2 + 2y'^2) \\ r^2 &= x'^2 + y'^2 \end{aligned} \quad (A.7)$$

onde:

$P_1, P_2$  são os parâmetros calibradores da câmara.

#### A.5. Refração Fotogramétrica

No processo de tomar fotografias, o raio de luz, no seu caminho do ponto objeto para o ponto imagem, é continuamente flexionado devido à variação do índice de refração do meio.

A refração fotogramétrica é corrigida através da

seguintes fórmulas, que podem ser encontradas em [01]:

$$\begin{aligned}x &= x' - dx_r \\y &= y' - dy_r \\dx_r &= x' \left( 1 + r^2/c_k^2 \right) \varepsilon_{45}\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}dx_r &= y' \left( 1 + r^2/c_k^2 \right) \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{45} &= \frac{1}{Z_s + Z_p} \left[ \frac{A}{C} + B \right] \cdot D\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$A = (1 - b Z_s)^c \cdot (Z_s - Z_p)\tag{A.10}$$

$$B = \frac{1}{b(c+1)} [(1-bZ_s)^{c+1} - (1-bZ_p)^{c+1}]\tag{A.11}$$

$$C = (1 - b Z_s)^c - (1 - b Z_p)^c\tag{A.12}$$

$$D = \ln \left[ \frac{1 + 0,000226 a (1 - b Z_p)^c}{1 + 0,000226 a (1 - b Z_s)^c} \right]\tag{A.13}$$

onde:

$$a = 1,22560$$

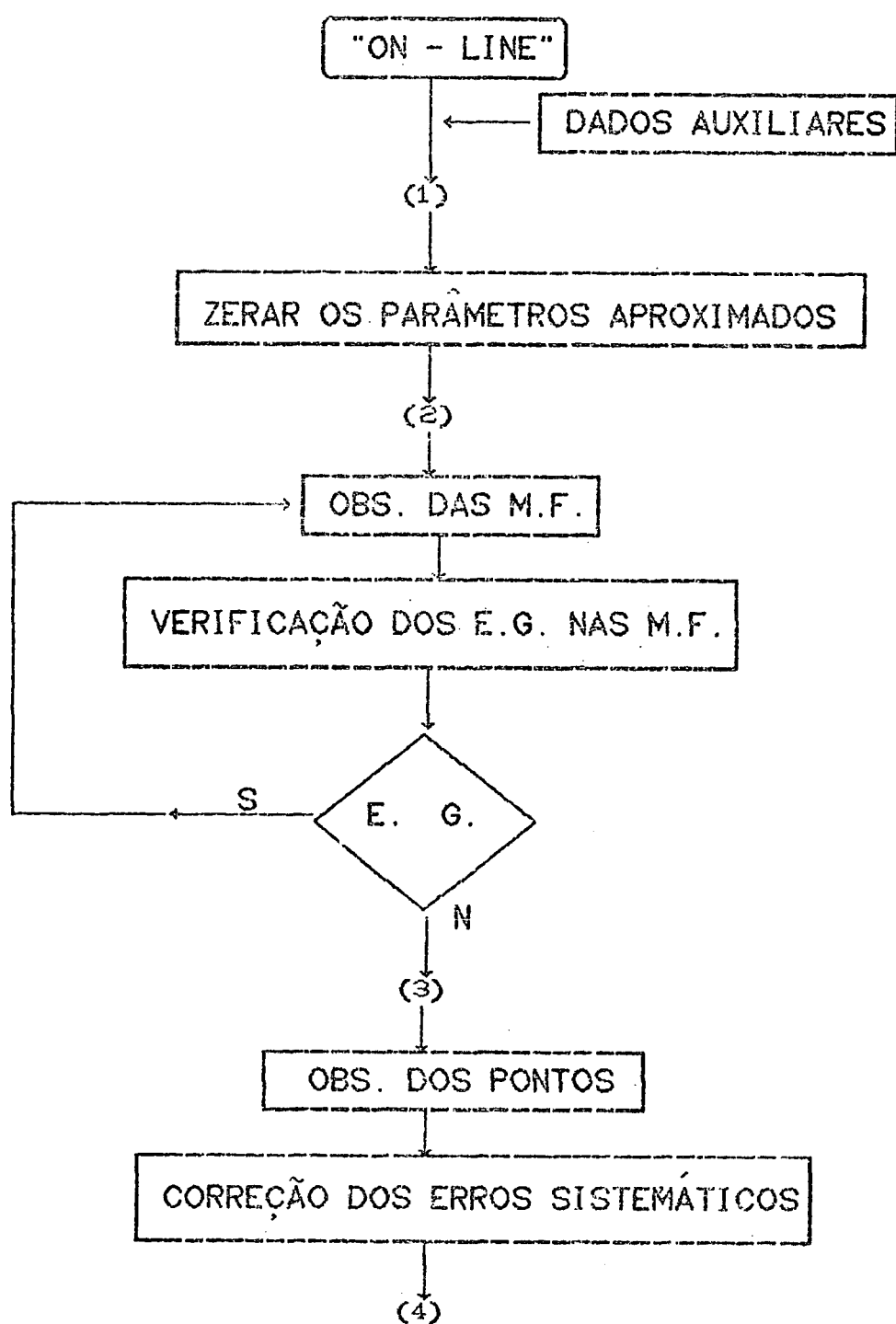
$$b = 0,02257$$

$$c = 4,25600$$

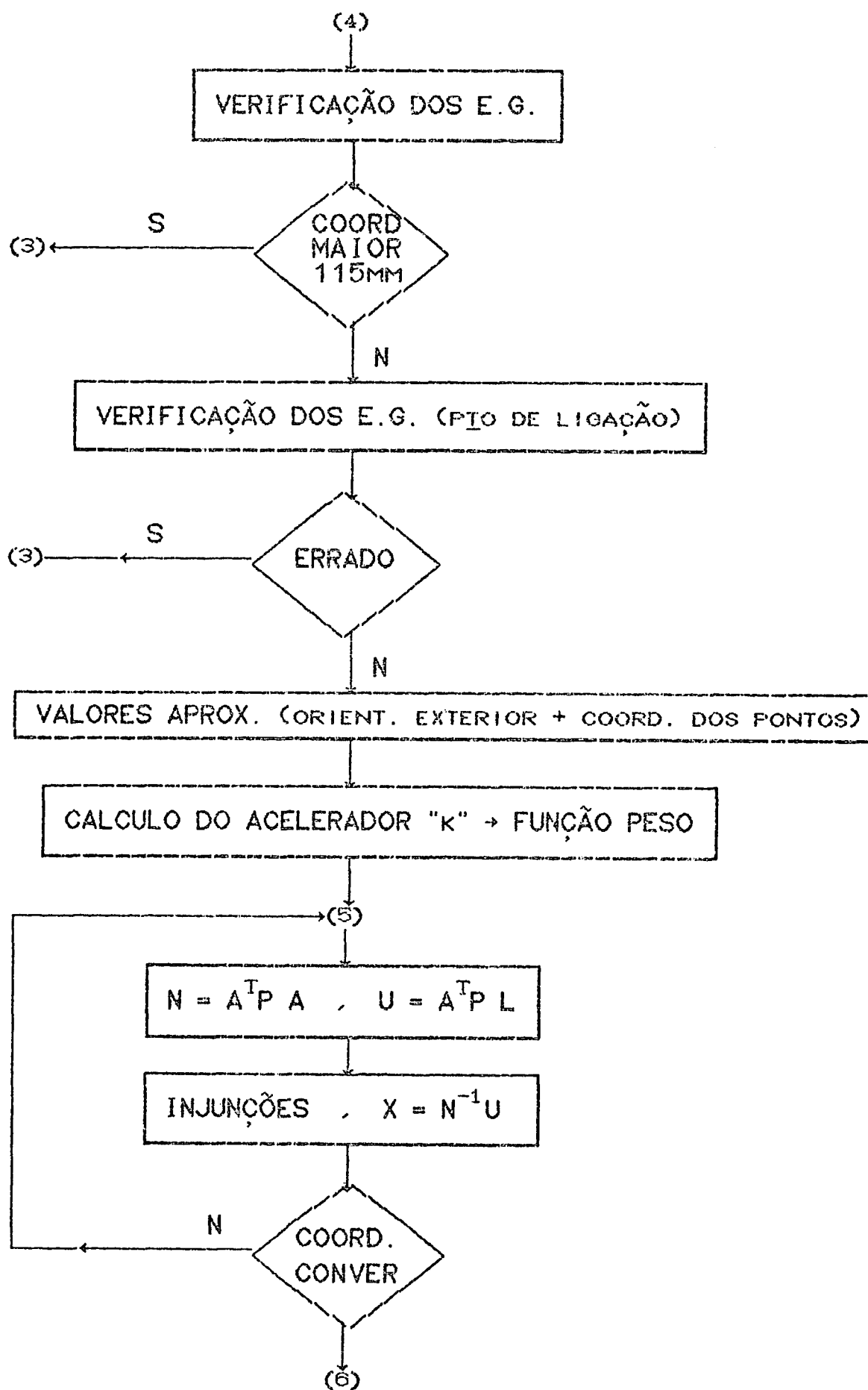
$Z_s$  = altitude de vôo em Km

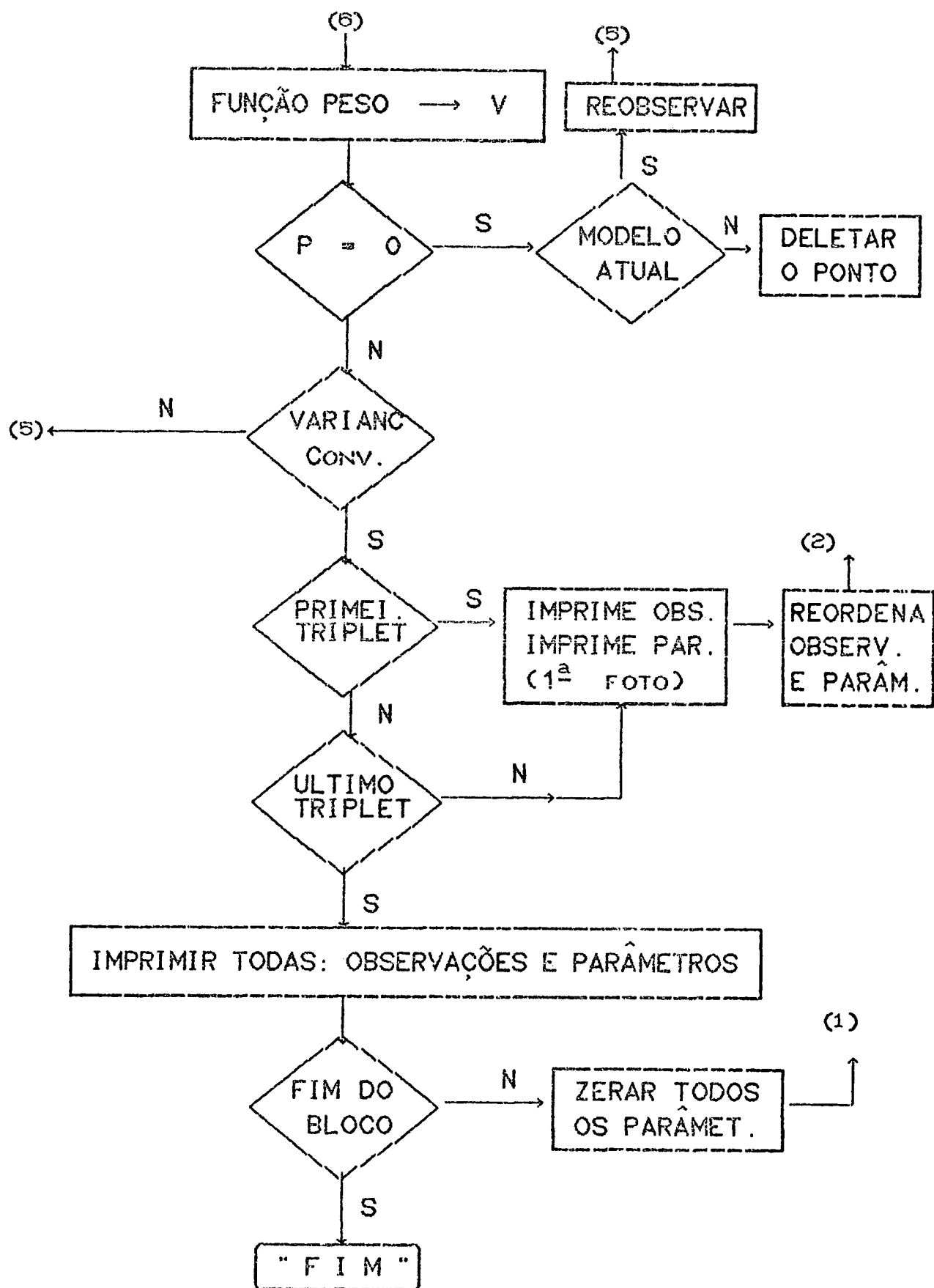
$Z_p$  = altitude do ponto em Km

## APÊNDICE B-1

FLUXOGRAMA - FOTOTRIANGULAÇÃO "ON - LINE" COM DEPURAÇÃO DE  
ERROS GROSSEIROS ("DANISH METHOD")

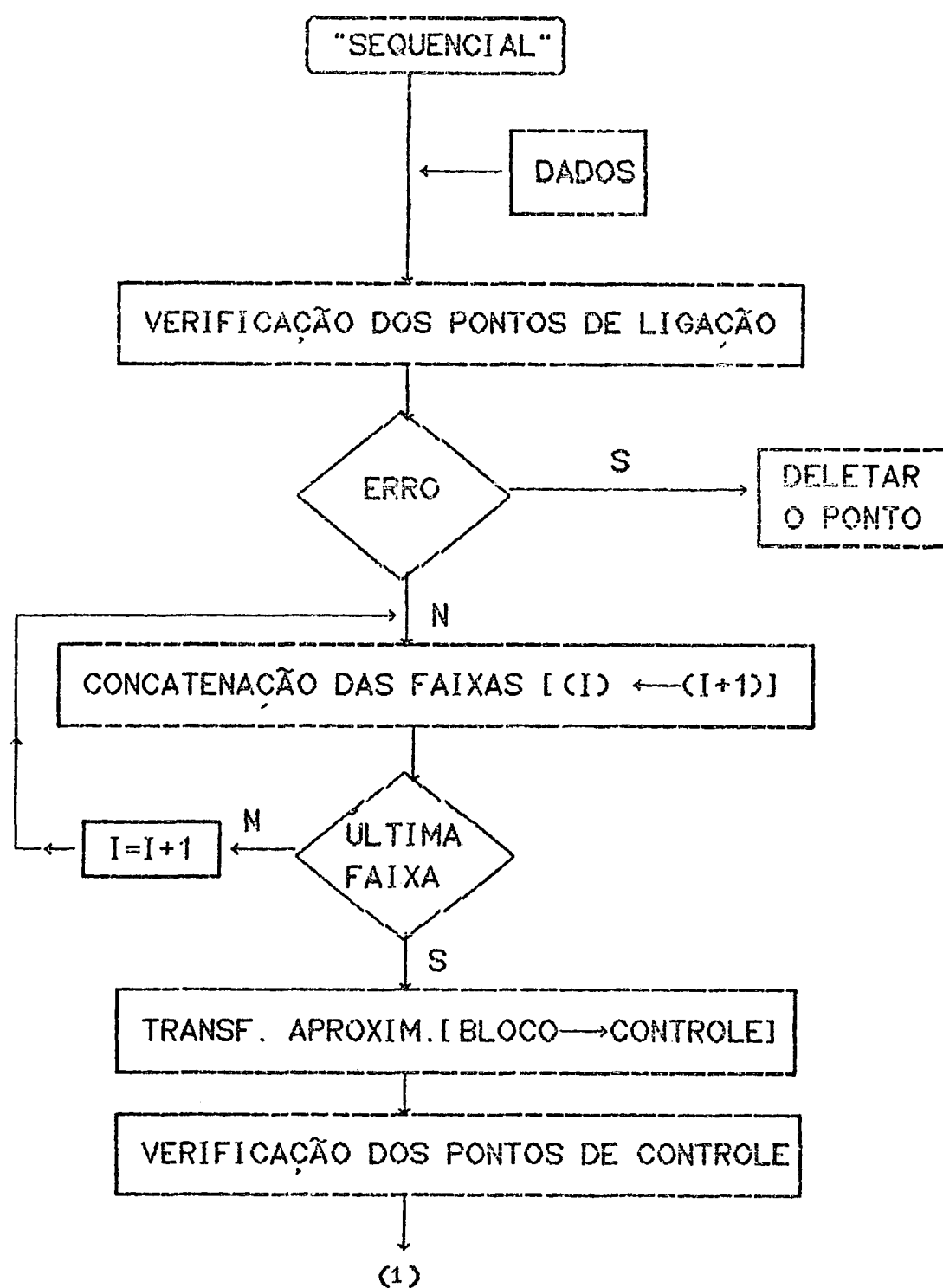


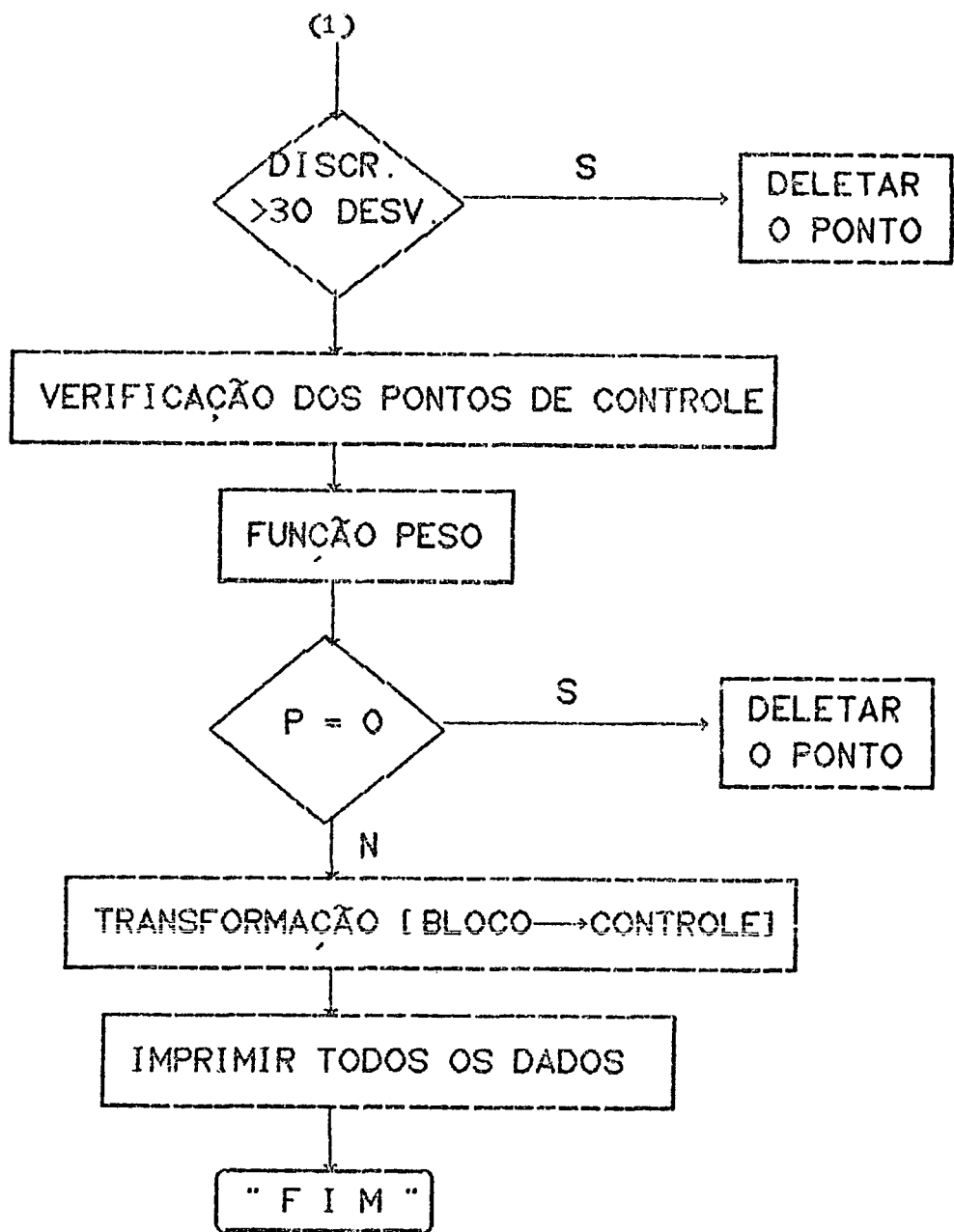




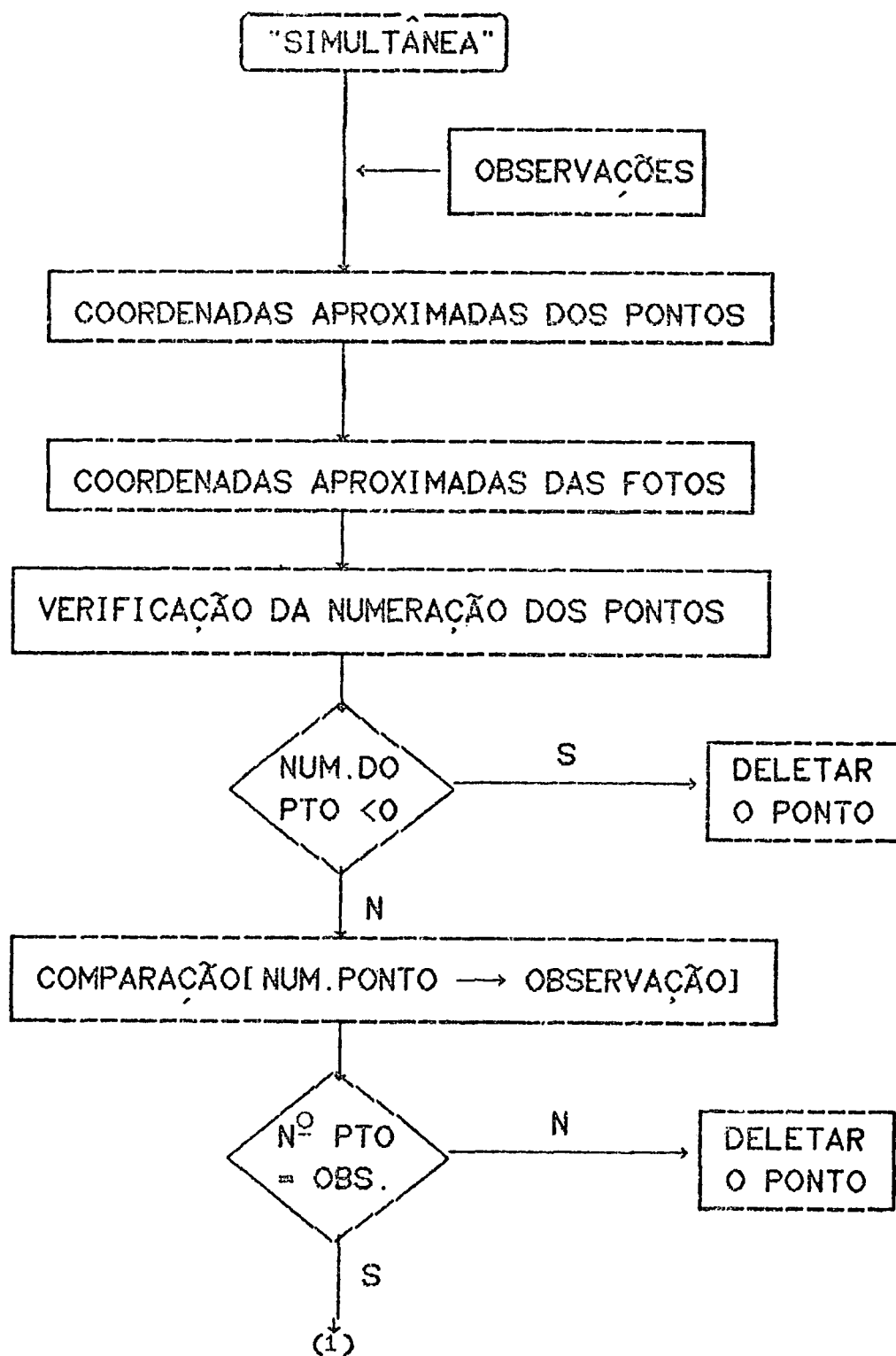
## APÊNDICE B.2

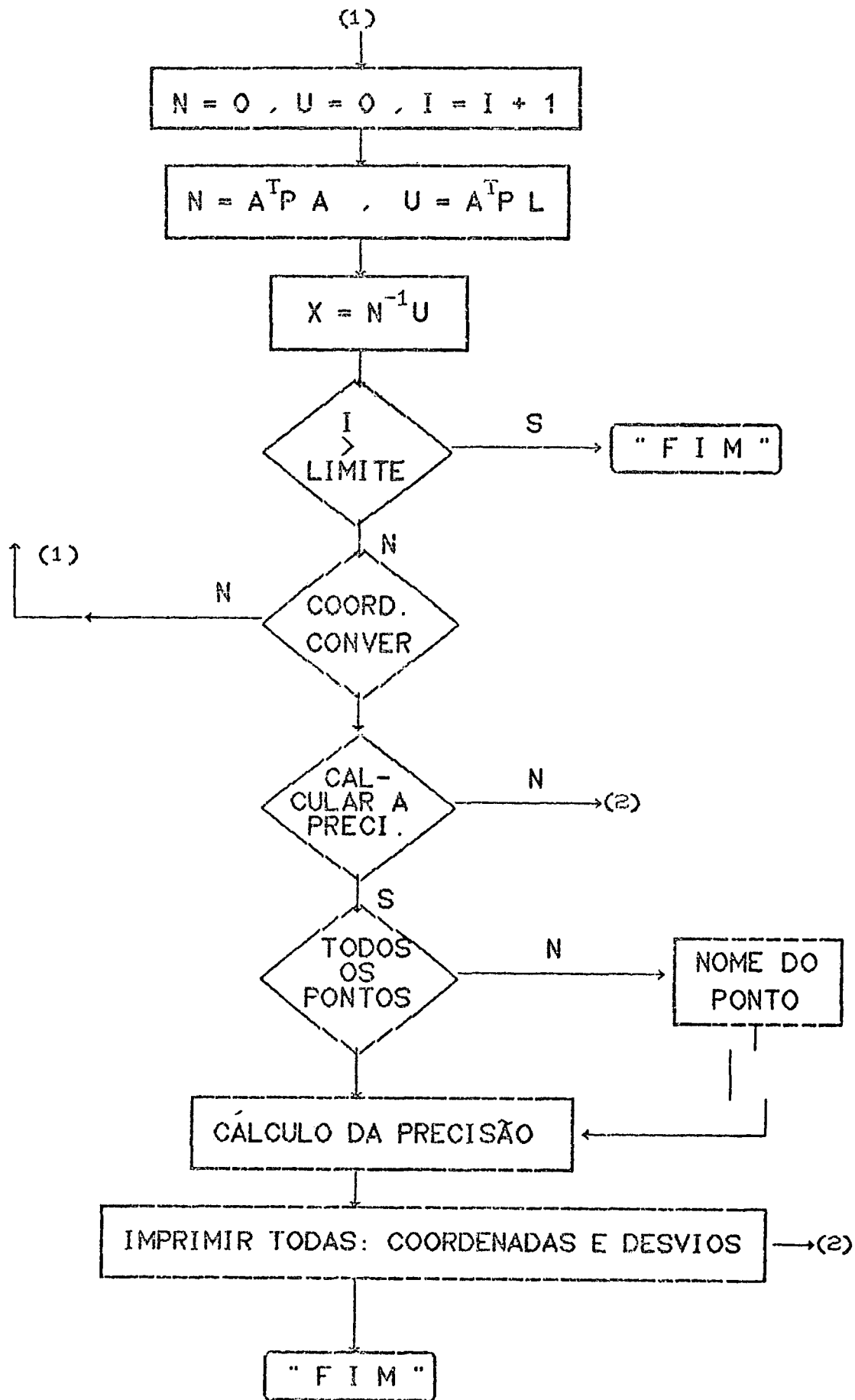
## FLUXOGRAMA - CONCATENAÇÃO DAS FAIXAS COM DEPURAÇÃO DE ERROS GROSSEIROS





## APÊNDICE B.3

FLUXOGRAMA - FOTOTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA SIMULTÂNEA POR FEIXES  
PERSPECTIVOS



## APÊNDICE - C

### Modelo matemático (equação de colinearidade)

#### C.1. Equação de colinearidade

A condição de colinearidade é dada por:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \quad (B.1)$$

através da equação B.1, pode-se obter as seguintes equações,

$$\frac{x}{x'} = \frac{z}{z'} \quad \rightarrow x = z \frac{x'}{z'} \quad (B.2)$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \quad \rightarrow y = z \frac{y'}{z'}$$

Pode-se verificar que, para qualquer ponto do negativo o  $z$  é constante e para câmara aerofotogramétrica, considera-se  $z = f = \text{constante}$ , então as equações B.2, podem ser escritas:

$$\begin{aligned} x &= f \frac{x'}{z'} \\ y &= f \frac{y'}{z'} \end{aligned} \quad (B.3)$$

Considerando ainda, que o sistema que define o ponto  $P(X',Y',Z')$ , no espaço objeto seja transladado, não paralelo e com escala diferente ao sistema que define o ponto  $p(x,y,z)$ , no espaço imagem; e ainda, para tornar o sistema unívoco, pois têm-se vários sistemas fotogramétricos, tanto quanto forem as fotografias, no bloco adota-se um sistema de coordenadas no espaço objeto, geralmente sistema geodésico cartesiano local, referenciando assim todos os sistemas fotogramétricos ao sistema do espaço objeto.

Sendo o sistema de coordenadas do espaço objeto dextrógiro, a transformação efetuada é dada pelo produto de três matrizes de rotação e um fator de escala, ou seja, uma transformação isogonal no espaço.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda' * M^T * \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

a transformação inversa da equação B-4 é:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \lambda * M * \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \\ Z - Z^0 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

$$M = R_z(\kappa) * R_y(\phi) * R_x(\omega)$$

onde,

$X, Y, Z$  são as coordenadas dos pontos no sistema do espaço objeto,

$X_0, Y_0, Z_0$  são as coordenadas dos centros perspectivos no sistema do espaço objeto,

$\omega, \phi, \kappa$  são os ângulos eulerianos,

$R_z(\kappa), R_y(\phi), R_x(\omega)$  são as matrizes de rotação relativas aos três eixos e

$\lambda$  é o fator de escala.

Fazendo o produto das matrizes de rotação obtém-se:



$$M = \begin{bmatrix} \cos(\kappa) & \sin(\kappa) & 0 \\ -\sin(\kappa) & \cos(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ 0 & -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{bmatrix}$$

ou,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

$$m_{11} = \cos(\phi) * \cos(\kappa)$$

$$m_{12} = \cos(\omega) * \sin(\kappa) + \sin(\omega) * \sin(\phi) * \cos(\kappa)$$

$$m_{13} = \sin(\omega) * \sin(\kappa) - \cos(\omega) * \sin(\phi) * \cos(\kappa)$$

$$m_{21} = -\cos(\phi) * \sin(\kappa)$$

$$m_{22} = \cos(\omega) * \cos(\kappa) - \sin(\omega) * \sin(\phi) * \sin(\kappa)$$

$$m_{23} = \sin(\omega) * \cos(\kappa) + \cos(\omega) * \sin(\phi) * \sin(\kappa)$$

$$m_{31} = \sin(\phi)$$

$$m_{32} = -\sin(\omega) * \cos(\phi)$$

$$m_{33} = \cos(\omega) * \cos(\phi)$$

substituindo as equações B.6 em B.5, têm-se:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \lambda * \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

ou,

$$X' = \lambda [m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)]$$

$$Y' = \lambda [m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)]$$

$$Z' = \lambda [m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)]$$

substituindo as equações B.7 em B.3, tem-se:

$$x = f * \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \quad (B.8)$$

$$y = f * \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

As equações B.8, são conhecidas como equação de colinearidade, que relacionam os sistemas de coordenadas do espaço imagem com o espaço objeto, considerando, as rotações (três), as translações (três) e a diferença de escala entre os sistemas.

## C.2. Derivadas Parciais da equação de colinearidade

Para o ajustamento pelo MMQ, a matriz A é formada, pelas derivadas parciais, da equação de colinearidade, com respeito aos parâmetros. A fim de se obter as derivadas parciais, reescrevendo a equação B.8, para melhor visualizar, têm-se:

$$F(x) = 0 = x + f \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

e

$$F(y) = 0 = y + f \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

fazendo,

$$F(x) = 0 = x + f \frac{C_x}{q}$$

(B.9)

$$F(y) = 0 = y + f \frac{C_y}{q}$$

o sinal positivo, antes da constante da câmara (f), é para a utilização de diapositivos.

Considerando as equações acima, as derivadas serão dadas por:

$$\frac{dF_x}{d\omega} = -\frac{f}{q^2} [q(\Delta Y * m_{13} - \Delta Z * m_{12}) - C_x(\Delta Y * m_{33} - \Delta Z * m_{32})]$$

$$\frac{dF_x}{d\phi} = -\frac{f}{q^2} [q(\Delta X * \sin(\phi) * \cos(\kappa) - \Delta Y * \sin(\omega) * \cos(\phi) * \cos(\kappa) + \Delta Z * \cos(\omega) * \cos(\phi) * \cos(\kappa))] + C_x[\Delta X * \cos(\phi) + \Delta Y * \sin(\omega) * \sin(\phi) - \Delta Z * \cos(\omega) * \sin(\phi)]]$$

$$\frac{dF_x}{d\kappa} = \frac{f}{q} (\Delta X * m_{21} + \Delta Y * m_{22} + \Delta Z * m_{23})$$

$$\frac{dF_x}{dX_0} = -\frac{f}{q^2} (q * m_{11} - C_x * m_{31}) = -\frac{\partial F_x}{\partial X_i}$$

$$\frac{dF_x}{dY_0} = -\frac{f}{q^2} (q * m_{12} - C_x * m_{32}) = -\frac{\partial F_x}{\partial Y_i}$$

$$\frac{dF_x}{dZ_0} = -\frac{f}{q^2} (q * m_{13} - C_x * m_{33}) = -\frac{\partial F_x}{\partial Z_i}$$

$$\frac{dF_y}{d\omega} = - \frac{f}{q^2} [q(\Delta Y * m_{23} - \Delta Z * m_{22}) - C_y (\Delta Y * m_{33} - \Delta Z * m_{32})]$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_y}{d\phi} = & - \frac{f}{q^2} [q[\Delta X * \text{sen}(\phi) * \text{sen}(\omega) - \Delta Y * \text{sen}(\omega) * \cos(\phi) * \text{sen}(\omega) + \\ & \Delta Z * \cos(\omega) * \cos(\phi) * \text{sen}(\omega)] + C_y [\Delta X * \cos(\phi) + \Delta Y * \text{sen}(\omega) * \text{sen}(\phi) - \\ & \cos(\omega) * \text{sen}(\phi)]] \end{aligned}$$

$$\frac{dF_y}{d\kappa} = - \frac{f}{q} (\Delta X * m_{11} + \Delta Y * m_{12} + \Delta Z * m_{13})$$

$$\frac{dF_y}{dX_o} = - \frac{f}{q^2} (q * m_{21} - C_y * m_{31}) = - \frac{\partial F_y}{\partial X_i}$$

$$\frac{dF_y}{dY_o} = - \frac{f}{q^2} (q * m_{22} - C_y * m_{32}) = - \frac{\partial F_y}{\partial Y_i}$$

$$\frac{dF_y}{dZ_o} = - \frac{f}{q^2} (q * m_{23} - C_y * m_{33}) = - \frac{\partial F_y}{\partial Z_i}$$

•

$$\Delta X = X - X_o$$

$$\Delta Y = Y - Y_o$$

$$\Delta Z = Z - Z_o$$

## APÊNDICE - D

### Resolução de sistemas

#### D.1. INTRODUÇÃO

Tem-se na solução de sistemas de equações normais uma das mais importantes fases do ajustamento, e essa importância cresce no caso de ajustamentos fotogramétricos, que podem conduzir a sistemas com várias centenas e até mesmo milhares de equações normais.

Quando se tem um sistema com um reduzido número de equações, a solução do problema pode ser relativamente simples. Por outro lado, se o sistema é constituído de um elevado número de equações, o que geralmente ocorre em problemas de ajustamentos fotogramétricos, a operação poderá ultrapassar a capacidade de memória dos computadores disponíveis, tornando-se, assim, impraticável a solução simultânea.

Atualmente existem muitos métodos que possibilitam resolver um sistema de equações normais. Alguns métodos, porém, possibilitam minimizar o uso de memória do computador; por esta razão, a importância de tais métodos aumenta com o "tamanho" do sistema e com os recursos disponíveis.

Nos problemas de ajustamento que ocorrem comumente em fotogrametria, a matriz dos coeficientes das equações normais é simétrica e positiva definida ( $N = A^T P A$ ), propriedades estas que permitirão algumas simplificações, tais como:

- utilização da triangular superior ou inferior da matriz  $N$ ,

economizando, assim, o armazenamento de quase metade dos elementos da  $N$ ;

- exploração da grande quantidade de "zeros" existentes na matriz  $N$ .

As simplificações citadas acima representam duplo ganho, isto é, de tempo e de memória do computador. E quando se trabalha com microcomputadores estas simplificações se tornam "indispensáveis", devido as propriedades e limitações destes.

O presente trabalho foi desenvolvido dentro destas limitações, isto é, procura desenvolver os métodos de resolução de sistemas de forma a economizar espaços de memória da máquina. E com isso acredita-se que possa ocorrer também uma economia de tempo. A "economia de memória" é conseguida explorando as propriedades da matriz  $N$  (seção D.3), que permite as simplificações comentadas anteriormente.

## D.2. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS

Atualmente existem muitos métodos que possibilitam resolver um sistema de equações. Estes métodos podem ser diretos ou iterativos, alguns deles serão vistos neste trabalho, com maiores detalhes.

### D.2.1 Métodos diretos

Os métodos diretos são os que dão como resultado, valores exatos, a menos do erro de operação computacional. Dentre os vários métodos pode-se citar o Cholesky.

#### D.2.1.1. Método de CHOLESKY

O método de CHOLESKY também se fundamenta em uma decomposição triangular, do sistema de equações normais  $NX=L$ .

Se  $N$  é simétrica, positiva definida, então  $N$  pode ser decomposta unicamente em  $E E^T$ , onde  $E$  é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos, não necessariamente unitários.

A construção de  $E$  pode ser realizada através do seguinte algoritmo:

Seja:  $N = E E^T$

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1k} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{k1} & n_{k2} & \dots & n_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & & & \\ e_{21} & e_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ e_{k1} & e_{k2} & \dots & e_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & \dots & e_{k1} \\ & e_{22} & \dots & e_{k2} \\ & & \dots & \\ & & & e_{kk} \end{bmatrix}$$

Aplicando a definição de produto de matrizes obtem-se:

##### a) Elementos diagonais:

$$n_{11} = e_{11}^2$$

$$n_{22} = e_{21}^2 + e_{22}^2$$

⋮

$$n_{kk} = e_{k1}^2 + e_{k2}^2 + \dots + e_{kk}^2$$

Assim:

$$\begin{cases} e_{11} = (n_{11})^{1/2} \\ e_{ii} = (n_{ii} - \sum_{m=1}^{i-1} e_{im}^2)^{1/2} \end{cases} \quad (I)$$

$$i = 2, 3, \dots, k$$

b) Elementos não diagonais

## b.1) 1ª coluna

$$n_{21} = e_{21} e_{11}$$

$$n_{31} = e_{31} e_{11}$$

.....

$$n_{k1} = e_{k1} e_{11}$$

## b.2) 2ª coluna

$$n_{32} = e_{31} e_{21} + e_{32} e_{22}$$

$$n_{42} = e_{41} e_{21} + e_{42} e_{22}$$

.....

## b.3) j-ésima coluna

$$n_{j+1,j} = e_{j+1,1} e_{j1} + e_{j+1,2} e_{j2} + \dots + e_{j+1,j} e_{jj}$$

$$n_{j+2,j} = e_{j+2,1} e_{j1} + e_{j+2,2} e_{j2} + \dots + e_{j+2,j} e_{jj}$$

.....

$$n_{kj} = e_{k1} e_{j1} + e_{k2} e_{j2} + \dots + e_{kj} e_{jj}$$

Assim,

$$\begin{cases} e_{i1} = \frac{n_{i1}}{e_{11}}, & i = 2, 3, \dots, k \\ e_{ij} = (n_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} e_{im} e_{jm}) / e_{jj}, & 2 \leq j \leq k \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Utilizando-se, numa ordem conveniente, as fórmulas (I) e (II) determinam-se os  $e_{ij}$ . Uma ordem conveniente pode ser:

$$e_{11}, e_{21}, e_{31}, \dots, e_{k1}; e_{22}, e_{32}, \dots, e_{k2}; \dots; e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{kk}$$



Uma vez calculado E a solução de  $NX = L$  fica reduzida a solução do par de sistemas triangulares:

$$E V = L \quad (\text{substituição normal})$$

$$E^T X = V \quad (\text{por retro-substituição})$$

#### D.2.2. Métodos Iterativos

Os métodos iterativos são aqueles que permitem obter a solução de um sistema de equações normais ( $NX = L$ ), com uma dada precisão, através de um processo infinito convergente, ou seja, através de um número infinito de iterações.

Estes métodos partem de valores arbitrariamente aproximados, que vão sendo melhorados gradativamente. Assim, a precisão da solução vai depender do número de iterações.

##### D.2.2.1. Método de GAUSS-SEIDEL

Seja o sistema  $NX = L$  e definindo M, D e R por:

$$m_{ij} = \begin{cases} n_{ij} & , \quad i > j \\ 0 & , \quad i \leq j \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} n_{ij} & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} n_{ij} & , \quad i < j \\ 0 & , \quad i \geq j \end{cases}$$

Pode-se então escrever:

$$N = M + D + R$$

$$(M + D + R)X = L$$

Por hipótese os  $d_{ii} \neq 0$ . Pode-se então dividir cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal, o que resulta  $D = I$ , assim os elementos de  $M^*$  são,

$$m_{ij} = \begin{cases} n_{ij}^* = \frac{n_{ij}}{n_{ii}} & , i > j \\ 0 & , i \leq j , \end{cases}$$

os elementos de  $R^*$  são,

$$r_{ij} = \begin{cases} n_{ij}^* = \frac{n_{ij}}{n_{ii}} & , i < j \\ 0 & , i \geq j \text{ e} \end{cases}$$

os elementos de  $L^*$  são,

$$l_i^* = \frac{l_i}{n_{ii}} \quad , i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Então, o sistema  $NX = L$  foi transformado como se segue,

$$(M^* + I + R^*)X = L^*,$$

$$(M^* + I)X = -R^*X + L^* \text{ e}$$

$$X = -(M^* + I)^{-1}R^*X + (M^* + I)^{-1}L^* \text{ e}$$

o processo iterativo definido por,

$$X^{(l+1)} = -(M^* + I)^{-1}R^*X^{(l)} + (M^* + I)^{-1}L^*$$

é chamado de GAUSS-SEIDEL.

Explicitando as componentes, usando para isso a equação do processo na forma:

$$(M^* + I)X^{(l+1)} = -R^*X^{(l)} + L^* \text{ ou}$$

$$X^{(l+1)} = -M^{\#} X^{(l+1)} - R^{\#} X^{(l)} + I^{\#}$$

resulta que o método de GAUSS-SEIDEL consiste na determinação de uma sequência de aproximantes de índice  $t$  ( $x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_k^{(t)}$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots$ ), a partir de valores iniciais ( $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}$ ) através do processo definido por:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(t+1)} &= 0 - n_{12}^* x_2^{(t)} - n_{13}^* x_3^{(t)} - \dots - n_{1k}^* x_k^{(t)} + 1_1^* \\ x_2^{(t+1)} &= -n_{12}^* x_1^{(t+1)} - 0 - n_{23}^* x_3^{(t)} - \dots - n_{2k}^* x_k^{(t)} + 1_2^* \\ x_3^{(t+1)} &= -n_{31}^* x_1^{(t+1)} - n_{32}^* x_2^{(t+1)} - 0 - \dots - n_{3k}^* x_k^{(t)} + 1_3^* \\ &\dots\dots\dots \\ x_k^{(t+1)} &= -n_{k1}^* x_1^{(t+1)} - n_{k2}^* x_2^{(t+1)} - n_{k3}^* x_3^{(t+1)} - \dots - 0 - 1_k^* \end{aligned} \right.$$

Portanto, as componentes de  $x^{(l+1)}$  são calculadas sucessivamente sem necessidade de se calcular  $(M^* + I)^{-1}$ .

#### D.2.2.2. Método dos GRADIENTES CONJUGADOS

O método iterativo (com  $n$  passos) conhecido como "Método dos GRADIENTES CONJUGADOS", é devido a Hestenes e Stiefel. Este método utiliza o conceito de gradiente e se estabelece para sistemas lineares cuja matriz dos coeficientes é simétrica e positiva definida.

Este método consiste, basicamente, em selecionar um vetor solução inicial  $X_1$ , uma direção  $V_1$  e uma distância  $\alpha_1$  na direção de  $V_1$ , para obter a aproximação seguinte,  $X_2$  e assim sucessivamente. Portanto, pode-se dizer que, em geral, o método consiste em aplicar,

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i V_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Segundo (LUTHE, 1978), este método pode ser

considerado exato, pois fornece solução exata na n-ésima iteração, sempre que o sistema for de ordem n e as operações aritméticas se processarem sem erros de arredondamento.

Dado o sistema,  $NX = L$ , com uma solução aproximada  $X_1$ , se define o primeiro vetor resíduo  $r_1$  como sendo,  $r_1 = L - AX_1$  e o vetor  $V_1$  como,  $V_1 = r_1$ .

A partir destes vetores continua o processo usando as expressões:

$$\alpha_i = \frac{V_i^T r_i}{V_i^T A V_i},$$

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i V_i,$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A V_i,$$

$$\beta_i = \frac{V_i^T A r_{i+1}}{V_i^T A V_i},$$

$$V_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i V_i,$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

### D.3. Otimizações

A fim otimizar o esforço computacional, ou seja, economizar espaço de memória e tempo aumentando a capacidade do programa, efetuou-se a transformação da triangular superior da matriz N para o vetor V com a mesma quantidade de posições,

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1n} \\ & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{2n} \\ & & & \dots & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & n_{nn} \end{bmatrix},$$

igual à,

$$V^T = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1n} & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{2n} & \dots & n_{nn} \end{bmatrix}.$$

Este procedimento de transferência dos dados foi realizado através dos seguintes algoritmos:

$$N(I,J) = V(K),$$

$$L = I - 1,$$

$$K = L * I + J - (L * L + L) / 2,$$

para ,  $I = 1, 2, \dots, n$  e  $J = I, I+1, \dots, n$ .

#### D.4. Testes com métodos de resolução de sistemas

Os testes foram realizados utilizando-se de duas matrizes, geradas por um programa de fototriangulação que resolve o sistema de equações normais pela Versol

método	ordem	tempo
Cholesky	39	00' 07,08''
	87	00' 48,46''
Gauss-Seidel	39	03' 13,57''
	87	13' 47,74''
Gradientes Conjugados	39	01' 57,70''
	87	01' 29,72''

Tabela D.01 - Tabela de eficiência dos métodos de resolução de sistemas

## ABSTRACT

In this work was, researched, developed and implemented one methodology of gross-errors detection in the analytical phototriangulation.

Data Snooping and Danish Method were the mathematical devices used in gross-errors detections. The first one was applied in observations and the second one in observations and control points.

Step-by-step proceeding in gross-errors detections was used, that is, errors are detected sequencelly, from the big one to the small one magnitude.

All the system, computational programs, was developed and implemented in an environment of a PC microcomputer.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] ANDRADE, J. B. Refração Fotogramétrica Curitiba. Boletim n<sup>o</sup> 23, Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. 1980. 37 p.
- [02] ANDRADE, J. B. ; Olivas, M. A. de A. Calibração de Câmeras Aerofotogramétricas. Curitiba. Boletim n<sup>o</sup> 26, Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. 1981. 39 p.
- [03] BOLOUCOS, T. "Error Detection and Reliability Studies in Analytical Formed Strips". In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. p. 87-98.
- [04] CARVALHO, F. R. "Error prediction and computations in photogrammetric flight planning". ITC Holanda . Tesen de Mestrado. 118 p.
- [05] DORRER, E. "Real Time Orientation as Integral Part of On line Analytical Aerial Triangulation. In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote



Sensing, 1980. p. 149 - 157

- |06| DOWIDEIT, G. R. "An On line Bundle Block Adjustament for Analytical Plotter".In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archieves of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>Th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. p. 168-177.
  
- |07| \_\_\_\_ "Experience with Improved On - line - bundle - block - adjustament on the APC 3". In: Proceeding of the Symposium, Commission III, ISPRS, Helsinki, 1982. p.
  
- |08| EL-HAKIM, S. F. "A Practical Study of Gross Error Detection in Bundle Adjustament". The Canadian Surveyor, vol. 35 (n<sup>o</sup> 4): p. 373 - 386, 1981.
  
- |09| \_\_\_\_ " Data Snooping with Weighted Observations". In: International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Otaniemi, Finlândia. Proceeding of the Symposium Matematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control, 1982. p. 126-133.
  
- |10| \_\_\_\_ " A Step - by - Step Strategy for Gross Error Detection". In: International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Otaniemi, Finlândia. Proceeding of the Symposium

Matemactical Models, Accuracy Aspects and Quality Control, 1982. p. 145-152.

- |11| FAIG, W. " Aerotriangulation ". ITC, Holanda, 117 p. 1976.
  
- |12| GEMAEL, C. " Introdução ao ajustamento de observações: Aplicações Geodésicas". Curso de Pós-graduação em ciências geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 1984.
  
- |13| GRUEN, A. W. "An Optimum Algorithm for On-line triangulation" In: Proceeding of the Symposium, Commission III, ISPRS, Helsinki, 1982. 21 p.
  
- |14| \_\_\_\_ "Algorithmic Aspects in On-Line Triangulation". Photogrammetric Engineering And Remote Sensing, Vol. 51, (n<sup>o</sup> 4): p. 419 - 436, 1985.
  
- |15| GRUN, A. "Internacional Reability models for aerial blundle systems". In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archieves of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>Th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. p. 272 - 283.
  
- |16| \_\_\_\_ "The accuracy of the modern blundle block adjustment in aerial photogrammetry. Photogrammetric Engineering

and Remote Sensing. vol. 48, n<sup>o</sup> 1, janeiro 1988. p. 45 - 54.

- [17] KILPELÄ, A. ; HEIKKILÄ, J. ; INKILÄ, K. "Some Results of gross error detection tests in relative orientation and scale transfer". Helsinki, Helsinki University of Technology. p. 622 - 627
  
- [18] JORGENSEN, C. ; FREDERIKSEN, P. ; KUBIK, K. ; WENG, W. "Ah Robust Estimation". In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. p. 268 - 277
  
- [19] KUBIK, K. "An Error Theory for the Danish Method". In: International Society for Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Otaniemi, Finlândia. Proceeding of the Symposium Mathematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control, 1982. p. 299-309.
  
- [20] KRARUP, T. ; JUHL, J. ; KUBIK, K. "Least Squares Adjustament ". In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980.

p. 369 - 378

- |21| KRATKY, K. " An Error Theory for the Danish Method ".  
In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. p. 379 - 388
  
- |22| LUGNANI, J. B. "Introdução ao ajustamento". Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 1984.
  
- |23| LUGNANI, J. B. ; MITISHITA, E. "Improvements in Gross Errors Detection in Aerotriangulation". In: International Society for Photogrammetry and Remote Sensing. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Rio de Janeiro, The XV<sup>th</sup> International Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1984. p. 657 - 662
  
- |24| LUGNANI, J. B. "Introdução à Fototriangulação". Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 134 p. 1987.
  
- |25| MARQUES, J. M. " Estatística - Formulários e tabelas ". Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 77 p. 1985.
  
- |26| MERCHANT, D. C. Analytical Photogrammetry - Theory and Practice - Part I. Ohio, Ohio State University, 1979.

114 p.

- [27] \_\_\_\_\_. Analytical Photogrammetry - Theory and Practice - Part II . Ohio, Ohio State University, 1980.
- [28] MIKHAIL, E. M. ; ACKERMANN, F. Observations and Least Squares. New York, IEP, 1976. 497 p.
- [29] MITISHITA, E. A. "Detecção de Erros Grosseiros em Pontos de Controle Planialtimétricos para Aerotriangulação", Brasília, XII Congresso Brasileiro de Cartografia, 1985. 15 p.
- [30] \_\_\_\_\_. "Detecção de Erros Grosseiros nas Aerotriangulações". Curitiba. Tese. Mestre em Ciências. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 1986. 245 p.
- [31] POPE, A. J. "The statistics of residuals and the detection of outliers". In: International Association of Geodesy. Grenoble, The XVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics. 1975. 23 p.
- [32] RADWAM, M. M. ; STEFANOVIC, P. ; ADHIKARY, K. R. "Triplets And Quadruplets in On - line Photogrametric Triangulation". In: Proceeding of the Symposium, Commission III, ISPRS, Helsinki, 1982. 36 p.

- [33] SILVA, J. F. C. Verificação de modelos hidráulicos, Curitiba, Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. 1983. 136 p.
- [34] \_\_\_\_\_. A inferência bayesiana e a detecção e localização automática de erros grosseiros em fototriangulação por feixes de raios. Curitiba. Tese doutorado. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. 1987. 88p.
- [35] STEIDLER, F. "On Solution Algorithms for Large Sparse Systems of Normal Equations". In: Internacional Society for Photogrammetry and Remote Sensing. Internacional Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Commission III. Hamburg, The XIV<sup>th</sup> Internacional Congress of Photogrammetry and Remote Sensing, 1980. p. 701 - 715
- [36] TOMMASELLI, A. M. G. Detecção de Erros Grosseiros em Fototriangulação. Seminário do Curso de Pós-graduação, Mestrado, da Universidade Federal do Paraná, 28 p. 1985.